פתרון תרגיל בית 8 - מש"ד

שאלה 1:

א.

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{X}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

פתרון:

(א3) ערכים עצמיים -

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -1-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \left[(-1-\lambda)^2 - 9\right](6-\lambda) = 0$$

$$(\lambda+4)(\lambda-2)(6-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = -4 \quad , \quad \lambda_2 = 2 \quad , \quad \lambda_3 = 6$$

(א3) וקטורים עצמיים -

$\lambda_1 = -4 \Rightarrow$

$$\overline{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 2 \Rightarrow$

$$\overline{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = 6 \Rightarrow$

$$\overline{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כאן המטריצה A לכסינה ⇐

$$e^{AX} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{6t} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-4t} + \frac{1}{2}e^{2t} & -\frac{1}{2}e^{-4t} + \frac{1}{2}e^{2t} & 0 \\ -\frac{1}{2}e^{-4t} + \frac{1}{2}e^{2t} & \frac{1}{2}e^{-4t} + \frac{1}{2}e^{2t} & 0 \\ \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{6t} & \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{6t} & e^{6t} \end{pmatrix}$$

$$\underline{X}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-4t} + \frac{1}{2}e^{2t} & -\frac{1}{2}e^{-4t} + \frac{1}{2}e^{2t} & 0 \\ -\frac{1}{2}e^{-4t} + \frac{1}{2}e^{2t} & \frac{1}{2}e^{-4t} + \frac{1}{2}e^{2t} & 0 \\ \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{6t} & \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{6t} & e^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

$\underline{X}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ נציב $t=0$ ונקבל

$C_1 = -1, \quad C_2 = 5, \quad C_3 = 3$

$$\underline{X}(t) = \begin{pmatrix} -3e^{-4t} + 2e^{2t} \\ 3e^{-4t} + 2e^{2t} \\ 2e^{2t} + e^{6t} \end{pmatrix} = 3e^{-4t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{6t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$\underline{X}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot X(t)$$

שלב 1:

נמצא ע"ע ו-ו"ע של A

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 4) = 0$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1+\sqrt{3}i$, $\lambda_3 = 1-\sqrt{3}i$

נמצא וקטורים עצמיים

$\lambda = \lambda_1 = 1$ ⇐

$$\vec{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נשתמש אחד מהערכים העצמיים המרוכבים, למשל

$\lambda_2 = 1+\sqrt{3}i$

נקבל –

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1+\sqrt{3}i \\ -1-\sqrt{3}i \end{pmatrix}$$

$$e^{(1+\sqrt{3}i)t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1+\sqrt{3}i \\ -1-\sqrt{3}i \end{pmatrix} = e^t \cdot (\cos(\sqrt{3}t) + i \cdot \sin(\sqrt{3}t)) \begin{pmatrix} 2 \\ -1+\sqrt{3}i \\ -1-\sqrt{3}i \end{pmatrix}$$

$$= e^t \cdot \begin{pmatrix} 2\cos(\sqrt{3}t) + i \cdot 2\sin(\sqrt{3}t) \\ -\cos(\sqrt{3}t) - \sqrt{3}\cdot\sin(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}i\cos(\sqrt{3}t) - i\sin(\sqrt{3}t) \\ -\cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) - \sqrt{3}\cdot i\cdot\cos(\sqrt{3}t) - i\sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$$

$$= e^{t} \cdot \begin{pmatrix} 2\cos(\sqrt{3}t) \\ -\cos(\sqrt{3}t) - \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \\ -\cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix} + i \cdot e^{t} \cdot \begin{pmatrix} 2\sin(\sqrt{3}t) \\ \sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) - \sin(\sqrt{3}t) \\ -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) - \sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$$

במבין סופי:

$$\underline{X}(t) = c_1 \cdot e^{t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{t} \cdot \begin{pmatrix} 2\cos(\sqrt{3}t) \\ -\cos(\sqrt{3}t) - \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \\ -\cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$$

$$+ c_3 \cdot e^{t} \cdot \begin{pmatrix} 2\sin(\sqrt{3}t) \\ -\cos(\sqrt{3}t) - \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \\ -\cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$$

שאלה 2

א.

$$x_1' = x_1 + x_2 + e^{at}$$

$$x_2' = 4x_1 + x_2 - 2e^{at}$$

פתרון:

מציאת x_c

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{at} \\ -2e^{at} \end{pmatrix}$$

(א3) ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים –

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \quad , \quad \lambda_2 = -1$$

(א3) וקטורים עצמיים –

$$\lambda_1 = 3 \Rightarrow \quad \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \Rightarrow \quad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

⇐ פתרון עבור המערכת ההומוגנית

$$\underline{x}(t) = c_1 \cdot e^{3t}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{-t}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & -e^{-t} \\ 2e^{3t} & 2e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}_p(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & -e^{-t} \\ 2e^{3t} & 2e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$$

נמצא את $C_1(t)$ ו- $C_2(t)$ ע"י:

$$\begin{pmatrix} e^{3t} & -e^{-t} \\ 2e^{3t} & 2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{at} \\ -2e^{at} \end{pmatrix}$$

$$C_1'(t) = 0 \Rightarrow C_1(t) = C_1$$

$$C_2'(t) = e^{t(a+1)} \Rightarrow C_2(t) = \frac{1}{a+1} \cdot e^{t(a+1)} + C_2 \qquad (a \neq -1)$$

$$\bar{X}(t) = C_1 \cdot e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{a+1} \cdot \begin{pmatrix} -e^{at} \\ 2 \cdot e^{at} \end{pmatrix} \Leftarrow$$

$a \neq -1$

נמצא כי: $a = -1$ מקרה שבו

$$\bar{X}(t) = C_1 \cdot e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \cdot e^{-t} \\ 2te^{-t} \end{pmatrix}$$

(7)

$$\underline{X}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 18t \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$ נתון:

פתרון המערכת ההומוגנית:

ע"ע ו- ו"ע:

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = 3 \quad , \quad \lambda_3 = -2$$

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = c_1 \cdot e^{t} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \cdot e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -e^{t} & e^{3t} & -e^{-2t} \\ 4e^{t} & 2e^{3t} & e^{-2t} \\ e^{t} & e^{3t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

פתרון פרטי, לאחר שיטת וריאציית הפרמטרים:

$$\bar{X}_p(t) = \begin{pmatrix} -e^{t} & e^{3t} & -e^{-2t} \\ 4e^{t} & 2e^{3t} & e^{-2t} \\ e^{t} & e^{3t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \end{pmatrix}$$

המשך

$$\begin{pmatrix} -e^{t} & e^{3t} & -e^{-2t} \\ 4e^{t} & 2e^{3t} & e^{-2t} \\ e^{t} & e^{3t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ c_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18t \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_2'(t) = e^{-3t} \cdot 9t$$

$$c_1'(t) = e^{-t} \cdot (1-3t)$$

$$c_3'(t) = -e^{2t} \cdot (6t+1)$$

⇐ כמו אינטגרציה מעלים נקבל –

$$c_2(t) = -(3t+1)e^{-3t}$$

$$c_1(t) = (3t+2) \cdot e^{-t}$$

$$c_3(t) = (-3t+1) \cdot e^{2t}$$

⇐ כפתרון ביניים

$$\underline{X}(t) = c_1 \cdot e^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \cdot e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$+ (3t-2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - (3t+1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-3t+1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כפתרון כללי

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \underline{X}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

שלב 1: מציאת ע"ע

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3) - 2\cdot(\lambda-3) =$$

$$= (4-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-1) - 2\cdot(\lambda-3) = 0$$

$$(\lambda-3)\cdot\left[-(\lambda-1)(\lambda-4) - 2\right] = 0$$

$$-(\lambda-3)(\lambda-3)(\lambda-2) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 3 \quad , \quad \lambda_3 = 2$$

שלב 2: מציאת וקטורים עצמיים -

$\lambda_3 = 2$ עבור

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$$

$\alpha_1 = 1$ ⇐ נבחר

$$\vec{V_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_{1,2} = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$$

נבחר $\alpha_3 = m$, $\alpha_2 = t$

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} t+m \\ t \\ m \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \vec{V_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{X}(t) = c_1 \cdot e^{t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \cdot e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{X}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$:תנאי ההתחלה

(11) (错)

$$\underline{X}(0) = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 3 \\ C_1 + C_2 = 2 \\ C_1 + C_3 = 2 \end{cases}$$

$C_2 = 1,\ C_3 = 1,\ C_1 = 1$ ✓

$$\underline{X}(t) = e^{t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ ✓

$$y(t) = e^{t} + e^{3t}$$

$$z(t) = e^{t} + e^{3t}$$

$z(t) = y(t)$ ✓

(对)