פתרון תרגיל בית מספר 4 - משוואה

שאלה 4:

נמצא משוואה שכל הפתרונות שלה הם:

$$\begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) & y \\ -\sin(x) & \cos(x) & y' \\ -\cos(x) & -\sin(x) & y'' \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot y \cdot \begin{vmatrix} -\sin(x) & \cos(x) \\ -\cos(x) & -\sin(x) \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+2} \cdot y' \cdot \begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\cos(x) & -\sin(x) \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot y'' \cdot \begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix}$$

$$= y \cdot (\sin^2(x) + \sin^2(x)) - y' \cdot (0) + y'' \cdot (\cos^2(x) + \sin^2(x)) = y'' + y$$

לכן המשוואה שלנו היא:

$$y + y'' = 0$$

פתרון סעיף ב'

נמצא ערכים עצמיים -

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -1-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}\cdot(6-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(6-\lambda)\left[(-1-\lambda)^2 - 9\right] = (6-\lambda)(\lambda^2+2\lambda+1-9) = 0$$

$$= (6-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-8) = 0$$

$$\lambda_1 = 6 \quad , \quad \lambda_2 = 2 \quad , \quad \lambda_3 = -4$$

נמצא וקטורים עצמיים -

$\lambda_1 = 6$

$$\begin{pmatrix} -7 & 3 & 0 \\ 3 & -7 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -7\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 - 7\alpha_2 = 0 \\ -2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \qquad V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 2$ וקטור

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3)

$\lambda_3 = -4$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftarrow$$

$$\bar{x}(t) = c_1 \cdot e^{6t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \cdot e^{-4t} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}(t) = e^{6t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot e^{-4t} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 3

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

נמצא ערכים עצמיים -

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{1+2} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2-\lambda \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left[(2-\lambda)(-1-\lambda)+1\right] + 3(-1-\lambda) + 2 + 4 \cdot \left[3 - 2 \cdot (2-\lambda)\right] =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-1) + 5\lambda - 5 = (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-1) - 5 \cdot (1-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda) \cdot (\lambda^2-\lambda-1-5) = (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-6) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = 3 \quad , \quad \lambda_3 = -2$$

נמצא וקטורים עצמיים -

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{X}(t) = c_1 \cdot e^{1t} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \cdot e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftarrow$$