פתרון תרגיל בית מספר 9 - משפ"ה

שאלה 1:

א.

$$y'' - 2y' + 10y = 0 \quad , \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1$$

פתרון:

נשתמש בכך שפתרון המשוואה יהיה מהצורה $y = e^{kx}$

$$\Leftarrow$$

$$y' = k \cdot e^{kx}, \quad y'' = k^2 \cdot e^{kx}$$

נציב ונקבל-

$$e^{kx} \cdot (k^2 - 2k + 10) = 0$$

נשים לב $e^{kx} \neq 0$ ונקבל-

$$k^2 - 2k + 10 = 0$$

$$k_1 = 1 + 3i \quad , \quad k_2 = 1 - 3i$$

נבחר בשורש $1+3i$

$$\Leftarrow$$

$$y = c_1 \cdot e^x \cdot \cos(3x) + c_2 \cdot e^x \cdot \sin(3x)$$

נציב $y(0) = 0$

$$0 = c_1 \cdot e^0 \cdot 1 + c_2 \cdot e^x \cdot \sin(0)$$

$$\boxed{c_1 = 0}$$

$$y'(0) = 1$$

$$y' = c_1 \cdot e^x \cdot \cancel{\cos(3x)}^{0} - 3c_1 \cdot e^x \cdot \cancel{\sin(3x)}^{0} + c_2 \cdot e^x \cdot \sin(3x) + 3c_2 \cdot e^x \cdot \cos(3x)$$

$$1 = c_2 \cdot e^0$$

$$\boxed{c_2 = 1}$$

$$\boxed{y = e^x \cdot \sin(3x)} \quad \Leftarrow$$

(2)

ב.

$$5y'' + 8y' + 4y = 0$$

נציב $y = e^{kx}$ ונקבל

משוואה אופיינית

$$5k^2 + 8k + 4 = 0$$

$$k_1 = -\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i \quad , \quad k_2 = -\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$$

נבחר שורש אחד

$$y = c_1 \cdot e^{-\frac{4}{5}x} \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right) + c_2 \cdot e^{-\frac{4}{5}x} \cdot \sin\left(\frac{2}{5}x\right)$$ ✓

(3)

$$y^{(8)} + 8y^{(4)} + 16y = 0$$

נציב $y = e^{kx}$ ונקבל

משוואה אופיינית

$$k^8 + 8k^4 + 16 = 0$$

$$(k^4 + 4)^2 = 0$$

$$(k^2 - 2k + 2)^2 \cdot (k^2 + 2k + 2)^2 = 0$$

נבחר שורש אחד מכל זוג שורשים מרוכבים

$k_{1,2} = 1 + i$ $\quad$ $k_{5,6} = -1 + i$

$k_{3,4} = 1 - i$ $\quad$ $k_{7,8} = -1 - i$

נבחר שורש אחד מכל זוג שורשים מרוכבים

$n = 8$

(3)

$$y = c_1 \cdot e^x \cdot \cos(x) + c_2 \cdot e^x \cdot \sin(x) + c_3 \cdot x \cdot e^x \cdot \cos(x) + c_4 \cdot x \cdot e^x \cdot \sin(x)$$
$$+ c_5 \cdot e^{-x} \cdot \cos(x) + c_6 \cdot e^{-x} \cdot \sin(x) + c_7 \cdot x \cdot \cos(x) + c_8 \cdot x \cdot \sin(x)$$

$$y''' - y'' + y' - y = 0 \quad , y''(0) = -1,\ y'(0) = 4,\ y(0) = 3$$ .2

$y = e^{kx}$ נסמן

$$k^3 - k^2 + k - 1 = 0$$
$$k^2(k-1) + (k-1) = 0$$
$$(k^2+1)\cdot(k-1) = 0$$
$$k_1 = i;\ k_2 = -i,\ k_3 = 1$$

$$y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot \cos(x) + c_3 \cdot \sin(x)$$

$$y''(0) = -1,\ y'(0) = 4,\ y(0) = 3$$

$$y = e^x + .2 \cdot \cos(x) + 3 \cdot \sin(x)$$ ✓

פתרון:

נחפש פתרון למשוואה ההומוגנית $y'' - 2y' + y = 0$ מהצורה $y = e^{kx}$

$$\Rightarrow$$

$$k^2 - 2k + 1 = 0$$

$$k_{1,2} = 1$$

$$\Rightarrow y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x$$

נחפש פתרון פרטי מהצורה:

$$y = c_1(x) \cdot e^x + c_2(x) \cdot x \cdot e^x$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x \cdot e^x \\ \frac{e^x}{x} & e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & x \cdot e^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{e^{2x}}{x}}{e^{2x}} = -\frac{1}{x} \Rightarrow c_1(x) = -x$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & x \cdot e^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix}} = \frac{\frac{e^{2x}}{x}}{e^{2x}} = \frac{1}{x} \Rightarrow c_2(x) = \ln(x)$$

$$\Rightarrow y_p = -x \cdot e^x + \ln(x) \cdot x \cdot e^x$$

$$y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x - x \cdot e^x + \ln(x) \cdot x \cdot e^x$$

ולכן $y(1)=0$, $y'(1)=0$ נדרש -

$$\boxed{y = e^x - x\cdot e^x + x\cdot e^x \ln(x) \qquad x>0}$$ ✓

ב. $y''+4y'+4y = e^{-2x}\cdot\ln(x)$

פתרון נפתור תחילה את המשוואה ההומוגנית $y=e^{kx}$ נניח

$$k^2+4k+4=0$$
$$k_{1,2}=-2$$

$$y = c_1\cdot e^{-2x} + c_2\cdot x\cdot e^{-2x}$$

נחפש פתרון פרטי

$$y_p = c_1(x)\cdot e^{-2x} + c_2(x)\cdot x\cdot e^{-2x}$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x\cdot e^{-2x} \\ e^{-2x}\cdot\ln(x) & (1-2x)\cdot e^{-2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x} & x\cdot e^{-2x} \\ -2\cdot e^{-2x} & (1-2x)e^{-2x} \end{vmatrix}} = \frac{-x\cdot\ln(x)\cdot e^{-4x}}{e^{-4x}} = -x\cdot\ln(x)$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2\cdot e^{-2x} & e^{-2x}\cdot\ln(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x} & x\cdot e^{-2x} \\ -2\cdot e^{-2x} & (1-2x)\cdot e^{-2x} \end{vmatrix}} = \frac{e^{-4x}\cdot\ln(x)}{e^{-4x}} = \ln(x)$$

$$c_1(x) = -\frac{x^2}{2}\ln(x) + \frac{x^2}{4}$$

$$c_2(x) = x\cdot\ln(x) - x$$

$$y = c_1\cdot e^{-2x} + c_2\cdot x\cdot e^{-2x} + \frac{x^2}{2}\cdot e^{-2x}\cdot\left(\frac{1}{2} - \ln(x)\right) + x\cdot e^{-2x}\cdot\left(\ln(x) - 1\right)$$

ג.

$$y'' + y = \frac{1}{\sin(x)}$$

משוואה הומוגנית

$$y'' + y = 0$$

נציב $y = e^{rx}$

$$r^2 + 1 = 0$$

$$r_1 = i \quad , \quad r_2 = -i$$

$$y = c_1\cdot\cos(x) + c_2\cdot\sin(x)$$

נחפש פתרון פרטי מהצורה

$$y_p = c_1(x)\cdot\cos(x) + c_2(x)\cdot\sin(x)$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin(x) \\ \frac{1}{\sin(x)} & \cos(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix}} = \frac{-1}{\cos^2(x) + \sin^2(x)} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$c_1(x) = -x$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ -\sin(x) & \frac{1}{\sin(x)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}{1}$$

$$c_2(x) = \ln(\sin(x))$$

$$y = c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot \sin(x) - x \cdot \cos(x) + \ln(\sin(x)) \cdot \sin(x)$$

ה.

$$y'' + 4y = \sec(2x)$$

פתרון:

נמצא תחילה את הפתרון ההומוגני של המשוואה $y = e^{kx}$

$$\sec(2x) = \frac{1}{\cos(2x)}$$

$$k^2 + 4 = 0$$

$$k_1 = 2i \quad , \quad k_2 = -2i$$

$$y = c_1 \cdot \cos(2x) + c_2 \cdot \sin(2x)$$

נמצא פתרון פרטי-

$$y_p = c_1(x) \cdot \cos(2x) + c_2(x) \cdot \sin(2x)$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin(2x) \\ \frac{1}{\cos(2x)} & 2\cos(2x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}}{2\cos^2(2x) + 2\sin^2(2x)} = \frac{-\sin(2x)}{2 \cdot \cos(2x)}$$

$$c_1(x) = \frac{1}{4} \ln(\cos(2x))$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos(2x) & 0 \\ -2\sin(2x) & \frac{1}{\cos(2x)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{vmatrix}} = \frac{1}{2\cos^2(2x) + 2\sin^2(2x)} = \frac{1}{2}$$

$$c_2(x) = \frac{1}{2}x$$

$$y = c_1 \cdot \cos(2x) + c_2 \cdot \sin(2x) + \frac{1}{4}\ln(\cos(2x)) \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2}x \cdot \sin(2x)$$

(8) סעיף 3

$$y'' - 2y' + y = e^{2x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 7$$

פתרון:

$$k^2 - 2k + 1 = 0$$

$$k_{1,2} = 1$$

$$y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x$$

נחפש פתרון פרטי מהצורה:

$$y_p = A \cdot e^{2x}$$

$$y_p' = 2A \cdot e^{2x}, \quad y_p'' = 4Ae^{2x},$$

נציב למשוואה -

$$4A \cdot e^{2x} + 4 \cdot A \cdot e^{2x} + A \cdot e^{2x} = e^{2x}$$

נקבל: השוואת מקדמים -

$$e^{2x} :$$

$$\boxed{A = 1}$$

$$\Rightarrow$$

$$y_p = e^{2x}$$

$$y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x + e^{2x}$$

נסיון (מוכיח שיש c_1 ו- c_2)

נציב

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7 \quad \text{ונקבל -}$$

$$c_1 = 1$$

$$c_2 = 4,$$

$$\boxed{y = e^x + 4x \cdot e^x + e^{2x}}$$

✓

(ב.)

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 16x^2$$

פתרון: נפתור את המשוואה ההומוגנית

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

נניח $y = e^{kx}$

$$k^2 + 5k + 6 = 0$$

$$k_1 = -2 \quad , \quad k_2 = -3$$

$$y = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-3x}$$

נמצא פתרון פרטי, נציב:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

$$y'_p = 2Ax + B \quad , \quad y''_p = 2A$$

נציב ונקבל:

$$2A + 10Ax + 5B + 6Ax^2 + 6Bx + 6C = 16x^2 + 22x$$

נשווה מקדמים:

x^2 :

$$6A = 16 \Rightarrow A = \frac{16}{6}$$

x :

$$10A + 6B = 22$$

$$\frac{10 \cdot 16}{6} + 6B = 22$$

$$160 + 36B = 132$$

$$B = \frac{-28}{36}$$

מקבלים:

$$2A + 5B + 6C = 0$$

$$\frac{32}{6} - \frac{140}{36} + 6C = 0$$

$$\frac{52}{36} + 6C = 0$$

$$C = -\frac{216}{52}$$

$$y = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-3x} + \frac{16}{6}x^2 - \frac{28}{36}x - \frac{216}{52}$$

ב.

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$

פתרון הומוגני

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

$$k_1 = 1 \quad , k_2 = 2$$

$$y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x}$$

נרשום פתרון פרטי מהצורה

$$y_p = A \cdot x \cdot e^x$$

$$y_p' = A \cdot e^x + A \cdot x \cdot e^x \quad , \quad y_p'' = 2A \cdot e^x + A \cdot x \cdot e^x$$

נציב ונקבל

$$2A \cdot e^x + A \cdot x \cdot e^x - 3A e^x - 3A x \cdot e^x + 2A x \cdot e^x = e^x$$

נפשט ונשווה מקדמים

e^x :

$$2A - 3A = 1$$

$$\boxed{A = -1}$$

$x \cdot e^x$:

$$A - 3A + 2A = 0$$

$$0 = 0$$

לכן

$$y_p = -x \cdot e^x$$

$$\boxed{y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x} - x \cdot e^x}$$