תרגיל: $y' = 5x^2(y-2)^{\frac{2}{5}} \quad y(3) = 2$

פתרון: המד"ר הינה מד"ר פרידה ואנו רואים כי $y \equiv 2$ הוא פתרון קבוע. נחשב את האינטגרלים המתאימים לפתרון לפי הפרדת משתנים:

$$\int f(x)dx = \int 5x^2 dx = \frac{5}{3}x^3$$
$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int (y-2)^{-\frac{2}{5}} dy = \frac{5}{3}(y-2)^{\frac{3}{5}}$$
$$\frac{5}{3}(y-2)^{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}x^3 + c \longrightarrow (y-2)^{\frac{3}{5}} = x^3 + c$$
$$y = (x^3+c)^{\frac{5}{3}} + 2$$
$$2 = y(3) = (27+c)^{\frac{5}{3}} + 2 \longrightarrow c = -27$$
$$y = (x^3-27)^{\frac{5}{3}} + 2, \quad y \equiv 2$$

נראה כי יש למעשה עוד פתרונות. נגדיר

$$y(x) = \begin{cases} (x^3-27)^{\frac{5}{3}} + 2 & x \leq 3 \\ 2 & x > 3 \end{cases}$$

קל לבדוק (חדו"א 1) כי הפונקציה הנ"ל רציפה וגזירה ברציפות על כל הישר ומקיימת $y(3) = 2$ וגם $y'(3) = 0$. נראה כי פתרון כלומר ש־

$$y'(x) = 5x^2(y(x)-2)^{\frac{2}{5}}$$

ברור כי הזהות מתקיימת עבר $x > 3$ או $x < 3$. נבדוק עבור $x = 3$:

$$y'(3) - 5(3^2)(y(3)-2)^{\frac{2}{5}}$$
$$0 = 5 \cdot 3^2(2-2)^{\frac{2}{5}}$$
$$0 = 0$$

והוא מקיים את תנאי ההתחלה כמובן. עוד פתרון שמקיים את תנאי התחלה

$$y(x) = \begin{cases} (x^3-27)^{\frac{5}{3}} + 2 & x > 3 \\ 2 & x \leq 3 \end{cases}$$

נציין כי יש עוד אינסוף פתרונות המקיימים את תנאי ההתחלה, לא נראה זאת.