פתרון תרגיל בית מספר 5 - מש"ל

(1)

שאלה 1:

נתונה המשוואה הבאה: $y' = \arctg(x) \cdot (2y-1)$ הוכיח כי קיים יחיד פתרון $y(x)$ המקיים $y(0) = 0$ המוגדר בכל הישר הממשי.

פתרון: תחילה נשים לב כי הפונקציה $f(x,y) = \arctg(x)\cdot(2y-1)$ היא פונקציה רציפה בכל $\mathbb{R}^2$ ולכן קיים מלבן $(a,b)\times(c,d)$ ב $\mathbb{R}^2$ שמכיל את הנקודה $(0,0)$ ובו $f(x,y)$ ו- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ רציפות. מכאן שקיים פתרון יחיד לבעיית קושי $y(0)=0$, $y' = f(x,y)$ בקטע $I = [x_0-h, x_0+h]$ שבו $(x_0,y(x_0))$ נמצא בקבוצת הקיום של $y(x)$ הפתרון ומתקיים $(x,y(x))\in(a,b)\times(c,d)$.

נמצא את הפתרון המקסימלי של בעיית קושי. נשים לב כי $\frac{\partial f}{\partial y} = -2\arctg(x)$ ולכן $f(x,y) = \arctg(x)\cdot(2y-1)$ הוא פתרון מקסימלי של בעיית קושי. $\blacksquare$

פתרון 1: תחילה נשים לב כי הפונקציה $y(x)$ המקיימת $y(0)=0$ היא פתרון יחיד של בעיית קושי $y' = f(x,y)$, $y(0)=0$ כאשר $f(x,y) = \arctg(x)\cdot(2y-1)$ הו

שאלה 2:

הוכיח כי עבור הקטע המכיל את הנקודה $x=2$. שבו מתקיים $f'(2)<0$.
קיים פתרון יחיד $y=f(x)$, $(x^2+y^2)\cdot y=-1$

פתרון:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-3y^2-x \quad , \quad (x^2+y^2)\cdot y=-1=f(x,y)$$

כדיפרנציאבילית בכל $\mathbb{R}^2$ לכן נתון נמצאים $(a,b)\times(c,d)$

ב- $\mathbb{R}^2$ הקטע שמכיל את הנקודה $(-1,1)$

ב- $f(x,y)$ ו- $\frac{\partial f}{\partial x}$ כדיפרנציאבילית בכל.

$\Leftarrow$ לפי משפט הפונקציות הסתומות קיים פתרון יחיד (x,f)

נתון שהקטע מכיל את הנקודה $x=2$ הקטע

$f'(2)<0$.

$\Leftarrow$

$$f'(x)=-y\cdot\underbrace{(x^2+y^2)}_{\text{חיובי}}>0$$

$f'(2)<0$.

נתון שהקטע מכיל את הנקודות $2\geq x\geq 1$

$$f'=\begin{cases}\text{חיובי} & f<-1\\ \text{שלילי} & f(2)>f>0\end{cases}$$

מונוטוניות עולה בקטע $f>-1$ מונוטוניות יורדת $f(x)$ פתרון יחיד $f(x)>0$.

שאלה 3:

מצא שני פתרונות למשוואה: $y' = 2+\sqrt{9-(y-2x-1)^2}$

שמקיימים $y(0)=4$ בתחום $-3 \le y-2x-1 \le 3$.

האם יש סתירה למשפט הקיום והיחידות?

פתרון:

נסמן $z=y-2x-1$ ⇐ $y=z+2x+1$ ⇐ $y'=z'+2$

נציב ונקבל -

$$z'+2 = 2+\sqrt{9-z^2}$$

$$z' = \sqrt{9-z^2}$$

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{9-z^2}$$

$$(z \neq \pm 3) \quad \int \frac{1}{\sqrt{9-z^2}}\,dz = \int dx$$

(בסוף נבדוק אם $z=3 \Leftarrow y=2x-2$, $z=-3 \Leftarrow y=2x+4$ פתרונות למשוואה)

⇐

$$\arcsin\left(\frac{z}{3}\right) = x+C$$

$$z = 3\cdot\sin(x+C)$$

$$\Leftarrow \quad y = 3\cdot\sin(x+C)+2x+1$$

$$\Leftarrow \quad \boxed{y = 3\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+2x+1}$$

אין כאן סתירה למשפט הקיום והיחידות כי הנקודה $(0,4)$ היא נקודה שבה הנגזרת $\frac{\partial f}{\partial y}$ לא קיימת כי-

$$f(0,y) = 2+\sqrt{9-(y-1)^2}$$

לא גזירה ב- $\underline{y=4}$

ניתן לראות ש- $y=2x-2$ לא מקיים את תנאי ההתחלה ולכן אינו פתרון

$\boxed{y=2x+4}$ פתרון נוסף למשוואה.

לכן $y(x)$ פונקציה מחזורית. ☒

הוכל פונקציה מקבל משני מספרים לכל-

$$y(x) = h(x) = y(1+x)$$

כי הפונקציה $y' + z^2 y \cdot (\pi x)^4 \sin$

ראשי הפונקציה כאלו, ראשי מספר קבוע והבאופן מחזורי.

$h(x)$ ו- $y(x)$ פונקציה את אותה מחלקה ואקוויוולנטיות אותן

$$y(0) = y(1) = h(0)$$

ולכן $y(x)$ פונקציה את אותה מחלקה אבל-

$$h'(x) = \sin^4(\pi x) \cdot h^2(x) + h(x)$$

$$y^2(x+1) = h^2(x+1)$$

$$h(x) = y(x+1)$$

$$\sin^4(\pi(x+1)) = \sin^4(\pi x)$$

הוכחה-

$$h'(x) = y'(x+1) = \sin^4(\pi(x+1)) \cdot z^2 y(x+1) + y(x+1)$$

עבור x, מספר ממשי. $1+x$ ולכן-

הפונקציה $y(x)$ היא פתרון למשוואה, כלומר, פונקציה אותה **גזירה** עבור אותה משוואה בדיפרנציאלית $h'(x) = y'(x+1)$.

נשים ש $h(x)$ פונקציה $h(x) = y(x+1)$ ונסמן כי-

פתרון-

הוכח כי $y(x)$ היא פונקציה מחזורית עם מחזוריות T.

ידוע בנוסף למשוואה הומוגנית על $\mathbb{R}$, ומתון עם ש- $y(0) = y(1)$.

נתונה המשוואה $y' + z^2 y \cdot (\pi x)^4 \sin = 1$. מתון עם כי $y(x)$

שאלה 4

(7)

(5)

שאלה 5

מצא 9 פתרונות שונים לבעיית ההתחלה: $y' = xy^{\frac{1}{3}}$ שמקיימת $y(0) = 0$. עבור כל פתרון ציין בבירור באיזה תחום הוא מוגדר וגזור.

פתרון:

$$\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{3}}$$

$$\int y^{-\frac{1}{3}}\,dy = \int x\,dx \qquad (y \neq 0)$$

$$\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y = \pm\frac{1}{3\sqrt{3}}\sqrt{(x^2+C)^3}$$

נציב $(0,0)$:

$$0 = \pm\frac{1}{3\sqrt{3}}\sqrt{(0^2+C)^3}$$

$$\Rightarrow C = 0$$

לכן:

$$\boxed{y = \pm\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot x^3}$$

יתכן פתרון $\boxed{y = 0}$ כפתרון נוסף לבעיה.

לכן הפתרונות הם:

①	$y = 0$	
②	$y = \frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot x^3$	$\begin{cases} -\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot x^3 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$
③	$y = -\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot x^3$	$\begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot x^3 & x \leq 0 \\ -\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot x^3 & x > 0 \end{cases}$
④	$\begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot x^3 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot x^3 & x > 0 \end{cases}$
⑤	$\begin{cases} -\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot x^3 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ -\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot x^3 & x > 0 \end{cases}$
⑥	$\begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot x^3 & x \leq 0 \\ -\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot x^3 & x > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot x^3 & x \leq 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot x^3 & x > 0 \end{cases}$

(9) נתון פונקציה שלמה כך שמתקיים השוויון $f(x^3+y^3)=x\cdot y$ לכל (x,y) הנקודה $(0,0)$ היא נקודה שבה הנגזרת $\frac{\partial f}{\partial x}$ אך קיימות כן הנגזרות $f'_x(0,0)$ ו $f'_y(0,0)$ הנקודה $(0,0)$ היא נקודת אוכף של f.