פתרון תרגיל בית 4 - משפ'

שאלה 1:

א.

$$y'' \cdot x \cdot \ln(x) = y'$$

פתרון:

נציב

$$y' = p \quad \Leftrightarrow \quad y'' = p'$$

$$\Leftrightarrow \quad p' \cdot x \cdot \ln(x) = p$$

$$\frac{dp}{dx} \cdot x \ln(x) = p$$

$$(p \neq 0) \quad \int \frac{1}{p} dp = \int \frac{1}{x \ln(x)} dx$$

(נשים לב שמקבלים $p=0$ פתרון נוסף שמתקבל)

$$\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln(x)} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| = \ln|\ln(x)|$$

$$t = \ln(x)$$
$$dt = \frac{1}{x} dx$$

$$\Leftarrow \quad \ln|p| = \ln|\ln(x)| + \ln C$$

$$p = C \cdot \ln(x)$$

$$p = y' = C \ln(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = C \cdot \ln(x)$$

$$\int dy = \int C \cdot \ln(x) dx$$

$$\int C\cdot \ln(x)\,dx = \text{אינטגרציה בחלקים} \quad x\cdot C\cdot\ln(x) - \int Cx\cdot\frac{1}{x}\,dx = Cx\cdot(\ln(x)-1)$$

$u' = C \qquad v = \ln(x)$

$u = Cx \qquad v' = \frac{1}{x}$

$$\boxed{y = Cx\cdot(\ln(x)-1) + C_1}$$

נשים לב שגם $y = C_2$ הוא פתרון שמתקבל מ $p = 0$.

כי $2xy'y'' - (y')^2 + 1 = 0$

נגדיר $p = y' \Rightarrow p' = y''$

$$2xpp' - p^2 + 1 = 0$$

$$2xpp' = p^2 - 1$$

$$2x\frac{dp}{dx}p = p^2 - 1$$

$$\int \frac{2p}{p^2-1}\,dp = \int \frac{1}{x}\,dx \qquad (p \neq \pm 1)$$

משוף נמצא גם $p = 1 \Rightarrow y = x + C$

$p = -1 \Rightarrow y = -x + C$

פתרונות סינגולריים

$$\ln|p^2-1| = \ln|x| + \ln C$$

$$p^2-1 = C\cdot x$$

$$p^2 = 1+Cx$$

$$p = \pm(1+Cx)^{\frac{1}{2}}$$

$$p = y' = \frac{dy}{dx} = \pm(1+Cx)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int dy = \int \pm(1+Cx)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\boxed{y = \pm\frac{2}{3C}(1+Cx)^{\frac{3}{2}} + C_1}$$

$$\boxed{y = -x+C \quad , \quad y = x+C}$$

← נשים לב שגם פתרונות אלו נובעים מהפתרון הכללי

ב.

$$x^3 y'' + x^2 y' = 1$$

פתרון:

נציב $y' = p$ $\Rightarrow$ $y'' = p'$

$$x^3 p' + x^2 p = 1 \quad \Leftarrow$$

(נחלק ב- $x^3 \neq 0$)

$$p' + p \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^3}$$

(נכפול ב- $\mu(x)$ כך ש-)

$$\mu p' + \mu p \cdot \frac{1}{x} = (\mu p)'$$

$$\mu p' + \mu p \cdot \frac{1}{x} = \mu' p + \mu p'$$

$\Leftarrow$ נפתור משוואה פרידה:

$$\mu' = \mu \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu \cdot \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{\mu} d\mu = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln|\mu| = \ln|x| + \ln \mu_0$$

$$\mu = \mu_0 \cdot x$$

נציב את המשוואה ב- μ

$$\underbrace{\mu_0 \cdot \rho' + \mu_0 \cdot \rho \cdot \frac{1}{x}}_{(\mu\rho)'} = \mu \cdot \frac{1}{x^3}$$

$$\mu\rho = \int \mu_0 \cdot \frac{1}{x^3} dx \quad \Leftarrow$$

$$\mu_0 \cdot x \cdot \rho = \int \mu_0 \cdot x \cdot \frac{1}{x^3} dx$$

$$x \cdot \rho = -\frac{1}{x} + C$$

$$\rho = -\frac{1}{x^2} + \frac{C}{x}$$

$$\rho = y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} + \frac{C}{x} \quad \Leftarrow$$

$$\int dy = \int -\frac{1}{x^2} + \frac{C}{x} dx$$

$$\boxed{y = \frac{1}{x} + C \cdot \ln|x|}$$

שאלה 2 סעיף ב'

$y(0)=-1$, $h=0.1$, $y'=-2x-y$

נוסחת הנקודה האמצעית -

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n+h \\ y_{n+1}=y_n+h\cdot f_{(x_n,y_n)} \end{cases}$$

$x_0=0$
$y_0=-1$

$f_{(x,y)}=y'=-2x-y$

$x_1=x_0+h=0+0.1=0.1$
$y_1=y_0+h\cdot f_{(x_0,y_0)}=-1+0.1\cdot(-2\cdot 0-(-1))=-0.9$

$x_2=x_1+h=0.1+0.1=0.2$
$y_2=y_1+h\cdot f_{(x_1,y_1)}=-0.9+0.1\cdot(-2\cdot 0.1-(-0.9))=-0.83$

$x_3=x_2+h=0.2+0.1=0.3$
$y_3=y_2+h\cdot f_{(x_2,y_2)}=-0.83+0.1\cdot(-2\cdot 0.2-(-0.83))=-0.787$

$x_4=x_3+h=0.3+0.1=0.4$
$y_4=y_3+h\cdot f_{(x_3,y_3)}=-0.787+0.1\cdot(-2\cdot 0.3-(-0.787))=-0.7683$

$x_5=x_4+h=0.4+0.1=0.5$
$y_5=y_4+h\cdot f_{(x_4,y_4)}=-0.7683+0.1\cdot(-2\cdot 0.4-(-0.7683))=-0.77147$

$y(0.5)=y(x_5)\approx y_5=-0.77147$ ⇐

שאלה 3

$y' = x - y$, $y(0) = 1$.

פתרון

נשתמש בשיטת פיקארד.

$f(x,y) = x - y$, $y_0 = 1$, $x_0 = 0$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,dt = 1 + \int_0^x (t-1)\,dt = \Leftarrow$$

$$= 1 - x + \frac{x^2}{2!}$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,dt = 1 + \int_0^x \left(t - 1 - \frac{t^2}{2} + t\right)dt = \Leftarrow$$

$$= 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3!}$$

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))\,dt = 1 + \int_0^x \left(t - 1 - t^2 + t + \frac{t^3}{6}\right)dt$$

$$= 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4!}$$

$$\vdots$$

$$y = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3\cdot 4} - \frac{x^5}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} - \cdots =$$

$$= 1 - x + 2\cdot\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} - \cdots\right) =$$

$$= x - 1 + 2\cdot\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} \cdots\right) = x - 1 + 2\cdot e^{-x}$$

$$\boxed{y = x - 1 + 2\cdot e^{-x}}$$

$\Leftarrow$

יהיו f וg שתי פונקציות הגזירות ברציפות ב$(0,0)$ ומתקיים כי
$f(x,y)$ ו- $\frac{\partial z}{\partial x}$ הנגזרת בכיוון הווקטור היחידה שכיוונו $(0,0)$
ולכן הגזרת מקיימת $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times(-1,1)$ מתקיים כי
קצב X גדול.
(f_x,f_y) ו- $\frac{\partial z}{\partial x}$ וy הנגזרת בכיוון וקטור $(-1,-X)$
כך הנגזרת בכיוון $-i$ $\Leftarrow$ $-1=y$ קיבלנו,

ב. $f(x,y)=\frac{1+y}{x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-2(1+y)}{X^2}$

כך שלפי הנתון קיים פתרון יחיד ובפרט עבור $z=0$.
(f_x,f_y) ו- $\frac{\partial z}{\partial x}$ הנגזרת בכיוון וקטור

ג. $f(x,y)=x\cdot arctg(y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2y+1}{X}$

כך
קיים פתרון יחיד ובפרט עבור $y=0$.
(f_x,f_y) ו- $\frac{\partial z}{\partial x}$ הנגזרת בכיוון וקטור היחידה שכיוונו

ד. $f(x,y)=4+y^2$, $f_z=\frac{\partial z}{\partial x}$

$y=0$ ולכן