פתרון תרגיל בית 3 - משפ"פ

שאלה 1:

א. משוואה דיפרנציאלית מהצורה $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ נקראת משוואה שם -

ת. M ו- N פונקציות בדפ"מ שם x ו- y.

ב. מתקיים - $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ אין $f(x,y)$.

ג.

ת. $(2x^3+3y)dx + (3x+y-1)dy = 0$

רמז - $M = 2x^3+3y$, $N = 3x+y-1$

פתרון -

M ו- N פונקציות בדפ"מ שם x ו-y ← נבדוק האם $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3$$

← נמצא את $\psi(x,y)$.

$$\psi(x,y) = \int M(x,y)dx = \int 2x^3+3y\,dx = \frac{x^4}{2} + 3yx + C(y)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 3x + C'(y) = N(x,y) = 3x+y-1$$

$$C'(y) = y-1$$

$$C(y) = \frac{y^2}{2} - y$$

$$\psi(x,y) = \frac{x^4}{2} + 3yx + \frac{y^2}{2} - y$$

$$\frac{x^4}{2} + 3yx + \frac{y^2}{2} - y = c$$

כאן צריכה להיות $C(y)$, ולכן $\psi(x,y)$ גם y ולא x

$$\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y} = 3x + C'(y)$$

$$N(x,y) = 3x + y - 1$$

$$3x + C'(y) = 3x + y - 1 \quad \Rightarrow$$

$$C'(y) = y - 1$$

$$C(y) = \frac{y^2}{2} - y + C_1$$

$$\psi(x,y) = \frac{x^4}{2} + 3xy + \frac{y^2}{2} - y + C_1 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{C = \frac{x^4}{2} + 3xy + \frac{y^2}{2} - y}$$

2. $(y^2 e^{xy^2} + 4x^3)dx + (2xy e^{xy^2} - 3y^2)dy = 0$

פתרון: $N = 2xy e^{xy^2} - 3y^2$, $M = y^2 e^{xy^2} + 4x^3$

1. M ו- N צריכות להיות רציפות בכל x ו y

2. $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2y \cdot e^{xy^2} + y^2 \cdot 2y \cdot e^{xy^2} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$

$\Rightarrow$ השלם מקיים

$$\psi(x,y)=\int M(x,y)dx + C(y) = \int (y^2 e^{xy^2} + 4x^3)dx + C(y)$$

$$\psi(x,y) = e^{xy^2} + x^4 + C(y)$$

* נגזור את $\psi(x,y)$ לפי y ונשווה ל- N

$$2yxe^{xy^2} + C'(y) = 2xye^{xy^2} - 3y^2$$

$$\Rightarrow \quad C'(y) = -3y^2$$

$$C(y) = -y^3 + c_1$$

$$\psi(x,y) = e^{xy^2} + x^4 - y^3 + c_1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{c = e^{xy^2} + x^4 - y^3}$$

3. $\left(y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2x\right)dx + \left(\frac{1}{x+y} + y^2(1+x)\right)dy = 0$

נראה שהמד"ר אינה מדויקת:

$$N = \frac{1}{x+y} + y^2(1+x) \quad , \quad M = y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2x$$

נחפש פתרון מהצורה:

$$\psi(x,y) = \int N(x,y)\,dy + C(x)$$

נחפש פתרון מהצורה:

$$\psi(x,y) = \int M(x,y)dx + C(y)$$

$$\psi(x,y) = \int \left(\frac{1}{x+y} + 2y(x+1) \right) dy + C(x) =$$

$$\psi(x,y) = \ln|x+y| + y^2(x+1) + C(x)$$

נגזור $\psi(x,y)$ לפי x ונשווה ל- M :

$$\frac{1}{x+y} + y^2 + C'(x) = y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2$$

$$C'(x) = 2 - \frac{y}{x(x+y)} - \frac{1}{x+y} = \frac{2x(x+y) - y - x}{x \cdot (x+y)} =$$

$$C'(x) = \frac{(2x-1)(x+y)}{x \cdot (x+y)} = \frac{2x-1}{x} = 2 - \frac{1}{x}$$

$$C(x) = 2x - \ln|x| + c_1$$

ולכן

$$\psi(x,y) = \ln|x+y| + y^2 \cdot (x+1) + 2x - \ln|x| + c_1$$

$$\boxed{c = \ln|x+y| + y^2 \cdot (x+1) + 2x - \ln|x|}$$

4. $(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0$

פתרון: בדיקה אם המשוואה מדויקת.

$M(t,x) = 2x^2t - 2x^3$, $N(t,x) = 4x^3 - 6x^2t + 2xt^2$

$$\psi(t,x) = \int M(t,x)\,dt + C(x) = \int (2x^2t - 2x^3)\,dt + C(x)$$

$$\psi(t,x) = x^2t^2 - 2x^3t + C(x)$$

גזירה $\psi(t,x)$ לפי x והשוואה ל- N:

$$2xt^2 - 6x^2t + C'(x) = 4x^3 - 6x^2t + 2xt^2$$

$$C'(x) = 4x^3$$

$$C(x) = x^4 + c_1$$

$$\psi(t,x) = x^2t^2 - 2x^3t + x^4 + c_1$$

$$\boxed{c = x^2t^2 - 2x^3t + x^4}$$

שאלה 2:

א.
$$(3x^2+ye^{xy})dx + (2y^3+kxe^{xy})dy = 0$$

פתרון:

נסמן:
$$M(x,y) = 3x^2 + ye^{xy}$$
$$N = 2y^3 + kxe^{xy}$$

כדי שמשוואה תהיה מדויקת צריך שיתקיים:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

$$e^{xy} + y\cdot x\cdot e^{xy} = k\cdot e^{xy} + k\cdot x\cdot y\cdot e^{xy}$$

$$e^{xy}\cdot[1+xy] = e^{xy}\cdot k\cdot[1+xy]$$

$$\boxed{k=1}$$

ב.
$$(3x^2+ye^{xy})dx + (2y^3+xe^{xy})dy = 0$$

פתרון:

$$\psi(x,y) = \int M(x,y)dx + C(y) = \int(3x^2+ye^{xy})dx + C(y)$$

$$= x^3 + e^{xy} + C(y)$$

נגזור $\psi(x,y)$ לפי y ונשווה ל-N:

$$xe^{xy} + C'(y) = 2y^3 + xe^{xy}$$

$$C'(y) = 2y^3$$

$$C(y) = \frac{y^4}{2} + C_1$$

$$\psi(x,y) = x^3 + e^{xy} + \frac{y^4}{2} + C_1$$

$$\boxed{C = x^3 + e^{xy} + \frac{y^4}{2}}$$

שאלה 3ב

ב.

$$x^2y^3 + x\cdot(1+y^2)y' = 0$$

כפול ב-

$$(x^2y^3)dx + x\cdot(1+y^2)dy = 0$$

$$M(x,y) = x^2y^3 \quad ; \quad N(x,y) = x + xy^2$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 3x^2y^2 \neq 1 + y^2 \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

← נמצא את מקומן !!

ג. נכפול $\frac{1}{xy^3}$ ונשווה לקבוע-

$$\frac{1}{xy^3}\cdot(x^2y^3)dx + \frac{1}{xy^3}\cdot(x+xy^2)dy = 0$$

$$x\,dx + \left(\frac{1}{y^3} + \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

נסמן ונמצא את מקומן

$$\tilde{M}(x,y) = x \quad , \quad \tilde{N}(x,y) = \frac{1}{y^3} + \frac{1}{y} \quad \text{(סתם)}$$

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial \tilde{N}(x,y)}{\partial x}$$

$$\psi(x,y) = \int \tilde{M}(x,y)\,dx + c(y) = \int x\,dx + c(y)$$

$$\psi(x,y) = \frac{x^2}{2} + c(y)$$

נגזור את $\psi(x,y)$ לפי y ונשווה ל-N:

$$c'(y) = \frac{1}{y^3} + \frac{1}{y}$$

$$c(y) = -\frac{y^{-2}}{2} + \ln|y| + c_1$$

$$\boxed{c = \frac{x^2}{2} - \frac{y^{-2}}{2} + \ln|y|} \quad \Leftarrow$$

ב.

$$(x+2)\cdot\sin(y)\,dx + x\cdot\cos(y)\,dy = 0$$

בדיקה:

$$M(x,y) = (x+2)\cdot\sin(y) \quad , \quad N(x,y) = x\cdot\cos(y)$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = (x+2)\cdot\cos(y) \neq \cos(y) = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

נכפיל ב$x\cdot e^x$ ונקבל גורם אינטגרציה $\Rightarrow$

$$x\cdot e^x\cdot(x+2)\cdot\sin(y)\,dx + x\cdot e^x\cdot x\cdot\cos(y)\,dy = 0$$

$$\tilde{M} = x\cdot e^x\cdot(x+2)\cdot\sin(y) \quad , \quad \tilde{N} = x^2\cdot e^x\cdot\cos(y)$$

$$\frac{\partial \tilde{M}(x,y)}{\partial y} = x \cdot e^x \cdot (x+2) \cdot \cos(y)$$

$$\frac{\partial \tilde{N}(x,y)}{\partial x} = 2x \cdot e^x \cdot \cos(y) + x^2 \cdot e^x \cdot \cos(y) = x \cdot e^x \cdot (2+x) \cdot \cos($$

⇐ נמצא פוטנציאל.

$$\psi(x,y) = \int \tilde{N}(x,y)\,dy + C(x) = \int (x^2 \cdot e^x \cdot \cos(y))\,dy + C(x) =$$

$$\psi(x,y) = x^2 \cdot e^x \cdot \sin(y) + C(x)$$

נגזור $\psi(x,y)$ לפי x, ונשווה ל- $\tilde{M}$ ⇐

$$2x \cdot e^x \cdot \sin(y) + x^2 \cdot e^x \cdot \sin(y) + C'(x) = x \cdot e^x \cdot (x+2) \cdot \sin(y)$$

$$C'(x) = 0$$
$$C(x) = c_1$$

⇐

$$\psi(x,y) = x^2 \cdot e^x \cdot \sin(y) + c_1$$

$$\boxed{c = x^2 \cdot e^x \sin(y)}$$

פתרון 48

1. $(2xy^3+y^4)dx+(xy^3-2)dy=0$

נסמן: $M=2xy^3+y^4$, $N=xy^3-2$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=y^3 \neq 6xy^2+4y^3=\frac{\partial M}{\partial y}$$

נחפש גורם אינטגרציה שתלוי ב- x בלבד או ב- y בלבד.

1. $\mu(x)$ 2. $\mu(y)$

1.
$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{(6xy^2+4y^3)-y^3}{xy^3-2}=\frac{6xy^2-3y^3-}{xy^3-2}$$

← הביטוי תלוי ב x וב y. לכן נמשיך לסעיף 2.

2.
$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}=\frac{6xy^2-3y^3-}{4y^3+2xy^3}=\frac{-3y^2(2x+y)}{y^3(2x+y)}=-\frac{3}{y}$$

← הביטוי תלוי רק ב-y

$$\mu(y)=e^{\int -\frac{3}{y}dy}=e^{-3\ln|y|}=\frac{1}{y^3}$$

כפול גורם אינטגרציה ב-

$$\frac{1}{y^3}(2xy^3+y^4)\,dx+\frac{1}{y^3}(xy^3-2)\,dy=0$$

$$(2x+y)\,dx+\left(x-\frac{2}{y^3}\right)dy=0$$

נסמן ב $\tilde{M}$ ו $\tilde{N}$ בהתאמה -

$$\tilde{M}=(2x+y)\quad,\quad \tilde{N}=\left(x-\frac{2}{y^3}\right)$$

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y}=1=\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$$

$$\psi(x,y)=\int \tilde{M}(x,y)\,dx+C(y)=\int(2x+y)\,dx+C(y)$$

$$\psi(x,y)=x^2+yx+C(y)$$

נגזור $\psi(x,y)$ לפי y ונשווה ל- $\tilde{N}$:

$$x+C'(y)=x-\frac{2}{y^3}$$

$$C'(y)=-\frac{2}{y^3}\Rightarrow C(y)=y^{-2}+C_1$$

$$\psi(x,y)=x^2+yx+y^{-2}+C_1$$

$$\boxed{C=x^2+yx+\frac{1}{y^2}}$$

ב.

$$y' = \frac{3yx^2}{x^3+2y^4}$$

פתרון

$$3yx^2\,dx = (x^3+2y^4)\,dy$$

$$3yx^2\,dx - (x^3+2y^4)\,dy = 0$$

$$M = 3yx^2 \qquad N = -(x^3+2y^4)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 \neq -3x^2 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

(משך) גורם הדוגמה על מנת שניתן יהיה

א. $\mu(x)$ ב. $\mu(y)$

א.

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{3x^2 - (-3x^2)}{-(x^3+2y^4)}$$

ביטוי תלוי x בלבד

לכן נמצא $\mu(x)$:

ב.

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{-6x^2}{3yx^2} = \frac{-2}{y}$$

ביטוי תלוי y בלבד

$$\mu(y) = e^{\int -\frac{2}{y}\,dy} = e^{-2\ln|y|} = \frac{1}{y^2}$$

כפונה $\frac{1}{y^2}$ גורם הדוגמה:

נכפיל את המשוואה ב- $\frac{1}{y^2}$ ונקבל:

$$\frac{1}{y^2}3yx^2\,dx - \frac{1}{y^2}(x^3+2y^4)\,dy = 0$$

$$\frac{3x^2}{y}\,dx + \left(-\frac{x^3}{y^2} - 2y^2\right)dy = 0$$

$$\tilde{M} = \frac{3x^2}{y}\quad,\quad \tilde{N} = -\frac{x^3}{y^2} - 2y^2$$

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = -\frac{3x^2}{y^2} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$$

⇐ המשוואה מקיימת.

$$\psi(x,y) = \int \tilde{M}(x,y)\,dx + C(y) = \int \frac{3x^2}{y}\,dx + C(y)$$

$$\psi(x,y) = \frac{x^3}{y} + C(y)$$

נגזור את $\psi(x,y)$ לפי y ונשווה ל- $\tilde{N}$:

$$-\frac{x^3}{y^2} + C'(y) = -\frac{x^3}{y^2} - 2y^2$$

$$C'(y) = -2y^2$$

$$C(y) = -\frac{2}{3}y^3 + C_1$$

⇐

$$\boxed{C = \frac{x^3}{y} - \frac{2}{3}y^3}$$

שיעור 5#

א. משוואת ברנולי היא משוואה דיפרנציאלית מהצורה:

$$y' + p(x)y = f(x)y^n$$

ב.

1. $$xy' + 2xy - y^3 = 0$$

פתרון:

$$xy' + 2xy = y^3$$

$$y = z^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow z = y^{-2}$$

נחלק ב- $n=3$ ולכן נסמן:

$$y' = -\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}} \cdot z'$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$-\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}} \cdot x^2 + 2x \cdot z^{-\frac{1}{2}} = z^{-\frac{3}{2}}$$

נכפול את המשוואה ב- $-2z^{\frac{3}{2}}$ ונקבל:

$$x^2 \cdot z' - 4xz = -2$$

נחלק ב- $x^2 \neq 0$

$$z' - \frac{4}{x}z = -\frac{2}{x^2}$$

נמצא את הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית y_h כך ש-

$$(z_h)' - \frac{4}{x}z_h = 0$$

$$z'_m + \frac{2}{x} m - z'_m = z_m$$

$$\frac{1}{x} m - = z_m$$

נוסיף לשני האגפים -

$$m_1 = -4 m \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{dp}{dx} = -4 m \cdot \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{m} dm = \int -4 \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$\ln|m| = -4 \ln|x| + c \quad \text{נוסיף קבוע}$$

$$m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{x^4}\right)$$

נציב את m בתוך המשוואה ב-

$$\underbrace{z' m + z \cdot \frac{1}{x} m - 4}_{(z m)'} = -\frac{2}{x} \cdot m$$

$$z m = \int m \cdot \frac{-2}{x^2} dx \quad \Leftarrow$$

$$m_0 \cdot \left(\frac{1}{x^4}\right) \cdot z = \int m_0 \cdot \left(\frac{1}{x^4}\right) \cdot \left(\frac{-2}{x^2}\right) dx$$

$$\Leftarrow$$

$$z \cdot \frac{1}{x^4} = \int \frac{-2}{x^6} dx$$

$$z \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{x^5} + C$$

$$z = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{x} + c\cdot x^4$$

$$y = z^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{x} + c\cdot x^4}}$$

ב.

$$x\cdot\frac{dy}{dx} - 2y = x^2 y^{\frac{1}{2}}$$

פתרון:

$$xy' - 2y = x^2 y^{\frac{1}{2}}$$

נעלן ב- $x \neq 0$

$$y' - 2\frac{y}{x} = x y^{\frac{1}{2}}$$

נסמן $z = y^{\frac{1}{2}} \Leftarrow y = z^2 \Leftarrow y' = 2z\cdot z'$

נציב ונקבל-

$$2z\cdot z' - 2z^2\cdot\frac{1}{x} = x\cdot z^1$$

נכפול את המשוואה ב- $z^{-\frac{1}{2}}$

$$z' + z\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\cdot x\cdot z^{-1}$$

נסמן- $z = w^{-1} \Leftarrow w = z^{-1} \Leftarrow w' = -w^{-2}z'$

נציב ונקבל-

$$-w^{-2}w' + w^{-1}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2}x w^{-2}$$

נכפול ב- $-w^2$ ונקבל-

$$w' - w\cdot\frac{1}{x} = -\frac{1}{2}x$$

קיבלנו משוואה לינארית מסדר 1

$$y_1 = \left(\frac{1}{2}x^2 + cx\right)^2 = x^2 \cdot \left(\frac{1}{2}x + c\right)^2$$

ג. $y' - \left(\frac{1}{x} + 5x^4\right)y = -x^3 y^2 \quad , \quad y(1) = 2.5$

פתרון:

$n = 2 \Rightarrow$ נסמן $z = y^{-1} \Rightarrow y = z^{-1} \Rightarrow y' = -z^{-2} \cdot z'$

נציב בנקבע $-z^{-2} \cdot z' - \left(\frac{1}{x} + 5x^4\right) \cdot z^{-1} = -x^3 \cdot z^{-2}$

נכפול ב- $-z^2$ ונקבל

$$z' + \left(\frac{1}{x} + 5x^4\right) \cdot z = x^3$$

נציב מקדם אינטגרציה $\mu(x)$ ונקבל

$$\mu \cdot z)' = z\left(\frac{1}{x} + 5x^4\right)\mu + z'\mu$$

$$\Leftarrow \quad z'\mu = z\left(\frac{1}{x} + 5x^4\right)\mu$$

מספיק למצוא פתרון

$$\mu' = \left(\frac{1}{x} + 5x^4\right)\mu$$

$$\frac{d\mu}{dx} = \left(\frac{1}{x} + 5x^4\right)\mu$$

$$\int \frac{1}{\mu} d\mu = \int \left(\frac{1}{x} + 5x^4\right) dx$$

$$\ln|\mu| = \ln|x| + x^5 \quad / e^{(\cdot)}$$

$$\Leftarrow$$

$$\mu = e^{\ln|x| + x^5} \cdot \mu_0$$

נכפול ב- $\mu(x)$ ונקבל

$$\underbrace{\mu z' + \mu\left(\frac{1}{x}+5x^4\right) z}_{(\mu z)'} = \mu x^3$$

$$\mu z = \int \mu x^3 \, dx$$

$$\mu_0 \cdot x e^{x^5} \cdot z = \int \mu_0 \cdot x \cdot e^{x^5} \cdot x^3 \, dx$$

$$x \cdot e^{x^5} \cdot z = \int x^4 \cdot e^{x^5} \, dx$$

$$x \cdot e^{x^5} \cdot z = \frac{1}{5} \cdot e^{x^5} + C$$

$$z = \frac{1}{5x} + \frac{C}{x \cdot e^{x^5}}$$

$$y = \frac{1}{\frac{1}{5x} + \frac{C}{x \cdot e^{x^5}}} = \frac{1}{\frac{e^{x^5} + 5 \cdot C}{5x \cdot e^{x^5}}} = \frac{5x \cdot e^{x^5}}{e^{x^5} + 5 \cdot C}$$

$$y(1) = 2.5 \quad \Leftarrow \text{C wird (3N)}$$

$$2.5 = \frac{5e}{e + 5C} \Rightarrow 2.5e + \frac{1}{2}C = 5e$$

$$\frac{1}{2}C = 2.5e$$

$$\Downarrow$$

$$C = \frac{e}{5}$$

$$\boxed{y = \frac{5 \cdot x \cdot e^{x^5}}{e^{x^5} + e}}$$

פתרון:

א. משוואת ברנולי. נציב $z=y^{1-2}=y^{-1}$

$$y'=y^2h_3(x)+h_2(x)y+h_1(x)$$

ב.

$$y'+y\left(\frac{2}{5}e^x+1\right)+y^2=e^{x^2}$$

פתרון:

נשים לב שפתרון פרטי למשוואת ברנולי הוא $y_1(x)$

נציב לכן $y=-e^x\cdot 2$ פתרון פרטי למשוואה:

נציב עכשיו פתרון כללי $y=y_1+\frac{1}{z(x)}$ ונקבל משוואה

עבור $z(x)$,

$$y=-e^x\cdot 2-\frac{1}{z}\quad\Leftarrow\quad y'=-e^x\cdot 2-\frac{2z}{z^2}$$

$$-e^x\cdot 2-\frac{2z}{z^2}=\left(-e^x\cdot 2+\frac{1}{z}\right)^2+\left(-e^x\cdot 2+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{2}{5}e^x+1\right)+e^{x^2}$$

$$-e^x\cdot 2-\frac{1}{z}+\frac{5}{2}e^{x^2}-e^x\cdot 2+\frac{1}{5}e^{x^2}+\frac{2}{5}e^x\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-e^x\cdot 4+e^{x^2}=\frac{2z}{z^2}$$

$$\frac{1}{z^2}+\frac{2}{5}e^x\cdot\frac{1}{z}-\frac{1}{z}=\frac{2}{z^2}$$

$$z'+\left(\frac{2}{5}e^x-1\right)\cdot z=-1$$

סיים משוואה לינארית מסדר 1

ג. משוואת ריקטי. היא משוואה מהצורה –

$$y'=h_3(x)y^2+h_2(x)y+h_1(x)$$

נציב y_h ב-y:

$$y' + y\cdot\left(1-\frac{3}{2}e^x\right) = (z\cdot y_h)'$$

נפתור את המשוואה ההומוגנית:

$$y_h' = y_h\left(1-\frac{3}{2}e^x\right)$$

$$y_h = y_0\cdot e^{x-\frac{3}{2}e^x}$$

נפתור את המשוואה המלאה: y

$$y = \frac{y_h' + z'y_h\left(1-\frac{3}{2}e^x\right)}{(z\cdot y_h)'}$$

$$z\cdot y_h = \int y_h\,dx$$

$$y_0\cdot e^{x-\frac{3}{2}e^x}\cdot z = \int y_0\cdot e^{x-\frac{3}{2}e^x}\,dx$$

$$e^{x-\frac{3}{2}e^x}\cdot z = \int e^{x-\frac{3}{2}e^x}\,dx$$

נציב:

$$t = e^x$$

$$dt = e^x\,dx$$

$$\int e^{x-\frac{3}{2}e^x}\,dx = \int e^{x}\cdot e^{-\frac{3}{2}e^x}\,dx = \int e^{-\frac{3}{2}t}\,dt = \frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}t} = \frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}e^x}$$

$$e^{x-\frac{3}{2}e^x}\cdot z = \frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}e^x} + c$$

$$z = \frac{2}{3}e^{-x} + c\cdot e^{-x+\frac{3}{2}e^x}$$

$$\boxed{y(x) = -2\cdot e^x + \frac{1}{\frac{2}{3}\cdot e^{-x} + c\cdot e^{-x+\frac{3}{2}e^x}}}$$

2. $y' = -(x^2+x+1) - y(1+x^2)$

נסמן $y_1(x) = -x$ פתרון פרט, נמצא:

נקבל משוואה עבור $z(x)$, כאשר $y = y_1 + \frac{1}{z}$

$$y_1' + \frac{z'}{z^2} = y_1(x) + \frac{1}{z}$$

ולכן $z' - 1 = \frac{2z}{z}$ ⇐ $\frac{1}{z} + x = y$ נציב:

$$\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{z} = -1 - x - x^2 - (1+x^2)\left(\frac{1}{z} + x\right) = \left(\frac{1}{z} + x\right)^2 - 1$$

$$\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{z} = -1 - x - \frac{1}{z} - x + \frac{x^2}{z} - x^2 + x^2 - x^2 + \frac{x^2}{z}$$

$$\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z}$$

$$z' = z + 1$$

$$z - z' = 1$$

שלב אופייני לפתרון

משפט 1

$$(z_m)' = z_m - z_m'$$ נקבל $z_m(x)$ כאשר

⇐

$$z_m' + z_m' = z_m - z_m'$$

$$z_m = -z_m'$$

$$m = -m'$$

$$m = -\frac{dx}{dp}$$

נפרד משתנים:

$$\int \frac{dm}{m} = \int -1\,dx$$

$$\ln|u| = -x + \ln u_0$$

$$u = u_0 \cdot e^{-x}$$

⇐

נציב בו את השוויון ש-u

$$u = \underbrace{zu' - u'z}_{(uz)'}$$

$$uz = \int u\,dx$$

⇐

$$u_0 \cdot e^{-x} \cdot z = \int u_0 \cdot e^{-x}\,dx$$

$$e^{-x} \cdot z = -e^{-x} + C$$

$$z = -1 + C \cdot e^{x}$$

⇐

$$y(x) = -x + \frac{1}{-1 + C \cdot e^{x}}$$

3. $y' = 1 + x + 2x^2\cos(x) - (1+4x\cdot\cos(x))y + 2y^2\cos(x)$

נסמן $y_1(x) = x$ כפתרון פרטי. נבצע את ההצבה:

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$$

נציב ונקבל $y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$ ומצד שני $y = x + \frac{1}{z}$

לכן

$$1 - \frac{z'}{z^2} = 1 + x + 2x^2\cos(x) - (1+4x\cdot\cos(x))(x + \frac{1}{z}) + 2(x + \frac{1}{z})^2\cdot\cos(x)$$

$$-\frac{z'}{z^2} + 1 = 1 + x + 2x^2\cos(x) - x - 4x^2\cos(x) - \frac{4x\cos(x)}{z} - \frac{1}{z} + \frac{2x\cos(x)}{z} + \frac{2\cos(x)}{z^2} + 2x^2\cos(x)$$

$$-\frac{z'}{z^2} = -\frac{1}{z} + \frac{2\cos(x)}{z^2}$$

$$z' = z - 2\cdot\cos(x)$$

$$z' - z = -2\cdot\cos(x)$$

כעת נפתור את המשוואה הלינארית שקבלנו

נסמן $\mu(x)$ כך ש-

$$(z\mu)' = z'\mu - z\mu'$$

$$z'\mu + z\mu' = z'\mu - z\mu$$

$$\mu' = -\mu$$

$$\int -2\cdot e^{-x}\cdot\cos(x)\,dx = -2\cdot e^{-x}\cdot\sin(x) + 2\cdot e^{-x}\cdot\cos(x) + \int 2\cdot e^{-x}\cdot\cos(x)\,dx$$

$$\int -2\cdot e^{-x}\cdot\cos(x)\,dx = -2\cdot e^{-x}\cdot\sin(x) - \int 2\cdot e^{-x}\cdot\sin(x)\,dx$$

$u = 2\cdot e^{-x}$ $\quad v' = \sin(x)$

$u' = -2\cdot e^{-x}$ $\quad v = -\cos(x)$

$$\int -2\cdot e^{-x}\cdot\cos(x)\,dx = -2\cdot e^{-x}\cdot\sin(x) - \int 2\cdot e^{-x}\cdot\sin(x)\,dx$$

$u = -2\cdot e^{-x}$ $\quad v' = \cos(x)$

$u' = 2\cdot e^{-x}$ $\quad v = \sin(x)$

$$e^{-x}\cdot z = \int -2\cdot e^{-x}\cdot\cos(x)\,dx$$

$$e^{-x}\cdot z = \int -2\cdot\frac{1}{e^{x}}\cdot\cos(x)\,dx$$

$$z\cdot e^{-x}\cdot e^{0} = \int -2\cdot\frac{1}{e^{x}}\cdot\cos(x)\,dx$$

$$z = e^{x}\cdot\int -2\cdot\frac{1}{e^{x}}\cdot\cos(x)\,dx$$

$$z = \int -2\cdot e^{0}\cdot\cos(x)\,dx$$

$$\underbrace{z' - z\cdot 1}_{(z\cdot e^{x})'} = -2\cdot e^{0}\cdot\cos(x)$$

נכפיל ב- e^{x} ונקבל:

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\int\frac{1}{y}\,dy = \int -1\,dx$$

$$\ln|y| = -x + c$$

$$y = e^{-x}\cdot e^{c}$$

$$y = c\cdot e^{-x}$$

נסמן e^{c} ב- c ונקבל:

$$-4\int e^{-x}\cdot\cos(x)\,dx = 2\cdot e^{-x}\cdot\left(\cos(x)-\sin(x)\right)$$

$$-2\cdot\int e^{-x}\cdot\cos(x)\,dx = e^{-x}\cdot\left(\cos(x)-\sin(x)\right)$$

$$z\cdot e^{-x} = e^{-x}\cdot\left(\cos(x)-\sin(x)\right)+C$$

$$z = \cos(x)-\sin(x)+C\cdot e^{x}$$

$$\boxed{y(x) = X + \frac{1}{\cos(x)-\sin(x)+C\cdot e^{x}}}$$