בדיון בכיתה מיום 2 – משפ"ד

שאלה 1:

נתונה המשוואה: $(y^2+x^2)dx+xydy=0$

א. מצא בלי שתוכיח בעזרת הקורס n עבורו המשוואה הדיפ' הומוגנית.

פתרון:

נתבונן במשוואה $f(x,y)=y'$ ונקרא הומוגנית אם מ"ש $f(\alpha x,\alpha y)=f(x,y)$ עבור $\alpha\neq 0$ שרירותי ו- x,y כלשהם.
$f(x,y)$ ו- $f(\alpha x,\alpha y)$ מצמצמים.

$$\Leftarrow \quad y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{(y^2+x^2)}{xy^n}$$

$$\text{ולכן} \quad f(x,y)=-\frac{(y^2+x^2)}{xy^n}$$

נמצא הומוגניות –

$$f(\alpha x,\alpha y)=-\frac{(\alpha y)^2+(\alpha x)^2}{(\alpha x)(\alpha y)^n}=-\frac{(\alpha^2y^2+\alpha^2x^2)}{\alpha^{1+n}xy^n}$$

$$=\frac{-\alpha^2(y^2+x^2)}{\alpha^{1+n}xy^n}=\frac{\alpha^2}{\alpha^{1+n}}f(x,y)$$

$\frac{\alpha^2}{\alpha^{n+1}} = 1$ $\iff$ הומוגנית $f(x,y)$ כלומר

$\alpha^{n+1} = \alpha^2 \iff$ $\boxed{n=1}$

ב. מצא את המשוואה שמגדיר עקום n שמאונך משפחת

פתרון:

$$(y^2+x^2)dx + xy\,dy = 0$$

$$y' = -\frac{y^2+x^2}{xy} = -\frac{y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy} = -\frac{y}{x} - \frac{x}{y}$$

נסמן $z = \frac{y}{x}$ $\Rightarrow$ $y = xz$ $\Rightarrow$ $y' = z + xz'$

נציב ונקבל

$$-z - \frac{1}{z} = z + xz'$$

$$xz' = -z - \frac{1}{z} = -\frac{z^2+1}{z} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx}x = -\frac{z^2+1}{z}$$

$$\int -\frac{2z}{1+z^2}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$(z^2+1 \neq 0)$

$$\int -\frac{z}{2z^2+1}\,dz = -\frac{1}{4}\int \frac{4z}{2z^2+1}\,dz = -\frac{1}{4}\ln\left(1+2z^2\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left(2z^2+1\right) = \ln|x| + c$$

נציב למשתנים המקוריים -

$$\boxed{\ln|x| = -\frac{1}{4}\ln\left(1+2\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) + c}$$

שאלה 2:

פתרו את המשוואות הבאות:

ג- $(y^3+x^3)dx + xy^2\,dy = 0$

פתרון: נרשום משוואה דיפרנציאלית זו בצורה נורמלית.

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{(y^3+x^3)}{xy^2} = -\frac{y^3}{xy^2} - \frac{x^3}{xy^2}$$

$$= -\frac{y}{x} - \left(\frac{x}{y}\right)^2$$

נסמן- $\frac{x}{y} = z \Rightarrow x\cdot z = y \Rightarrow z + x\cdot z' = y'$

נציב ונקבל-

$$z + x\cdot z' = -z - \frac{1}{z^2}$$

$$z' \cdot x = -2z - \frac{1}{z^2}$$

$$z' \cdot x = \frac{-2z^3 - 1}{z^2}$$

$$\frac{dz}{dx} x = \frac{-2z^3 - 1}{z^2}$$

$$\int \frac{z^2}{-(2z^3+1)} dz = \int \frac{1}{x} dx \qquad \left(z \neq -\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}\right)$$

(שים לב כאשר $z = -\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}$ פונקציה, $y = -\frac{x}{2^{\frac{1}{3}}}$ פתרון)

$$\int \frac{z^2}{-(2z^3+1)} dz = -\frac{1}{6} \int \frac{6z^2}{(2z^3+1)} dz = -\frac{1}{6} \ln|2z^3+1|$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{6} \ln|2z^3+1| = \ln|x| + C$$

נחזיר לפונקציה המקורית -

$$-\ln|x| = \frac{1}{6} \ln\left|2\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 1\right| + C$$

נפשוט את $y = -\frac{x}{2^{\frac{1}{3}}}$ פתרון לפונקציה $z = \frac{y}{x}$

$$y' = -\frac{(y^3+x^3)}{2yx^2}$$

$$-\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} \stackrel{?}{=} -\frac{\left(-\frac{x^3}{2} + x^3\right)}{x \cdot \frac{x^2}{2^{\frac{2}{3}}}}$$

✓

(5)

$$y' = \frac{4y - 3x}{2x - y}$$

ב.

$$\frac{y}{x^{\frac{1}{3}}} = y \quad , \quad -\ln|x| = \frac{1}{6}\ln\left|2\left(\frac{y}{x}\right)^3 + 1\right| + c$$

ג. נראה שהמשוואה הומוגנית ונציב $\frac{x}{y} = z$ ונקבל $x \neq 0$ נניח ש-

$$y' = \frac{4\left(\frac{x}{y}\right) - 3}{2 - \left(\frac{x}{y}\right)}$$

נשתמש $\frac{x}{y} = z \Rightarrow x \cdot z = y \Rightarrow z + x \cdot z' = y'$

נציב ונקבל -

$$z + x \cdot z' = \frac{4z - 3}{z - 2}$$

$$z - \frac{4z - 3}{z - 2} = x \cdot z'$$

$$\frac{z^2 + 2z - 3 - 4z}{z - 2} = x \cdot z'$$

$$\frac{z^2 - 2z - 3}{z - 2} = x \cdot z'$$

$$\frac{dz}{dx}\,x = \frac{z^2+2z-3}{2-z}$$

$$\int \frac{2-z}{z^2+2z-3}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$(z \neq -3, 1)$$

$$\frac{2-z}{z^2+2z-3} = \frac{2-z}{(z+3)(z-1)} = \frac{A}{z+3} + \frac{B}{z-1}$$

$(z+3)(z-1)$ /

$$\frac{2-z}{(z+3)(z-1)} = \frac{A}{z+3} + \frac{B}{z-1}$$

$$2-z = A(z-1) + B(z+3)$$

$$2-z = z(A+B) - A + 3B$$

מקדמים שווים -

$$\begin{cases} 2 = -A+3B \\ -1 = A+B \end{cases}$$

$$A = -\frac{5}{4},\ B = \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{2-z}{z^2+2z-3}\,dz = \int -\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{z+3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z-1}\,dz$$

$$= -\frac{5}{4}\ln|z+3| + \frac{1}{4}\ln|z-1|$$

$$\boxed{-\frac{5}{4}\ln|z+3| + \frac{1}{4}\ln|z-1| = \ln|x| + C}$$

נמצא גורמים ליניאריים:

$$y=-3x \quad \Leftarrow \quad z=-3 \quad \Leftarrow \quad y=-3x$$
$$y=x \quad \Leftarrow \quad z=1 \quad \Leftarrow \quad y=x$$

נבדוק אם הם פתרונות:

$$y'=\frac{4y-3x}{2x-y}$$

$y=-3x$

$$-3 \overset{?}{=} \frac{4(-3x)-3x}{2x-(-3x)} \quad \checkmark$$

$\Leftarrow \quad y=-3x$ פתרון סינגולרי.

$y=x$

$$1 \overset{?}{=} \frac{4x-3x}{2x-x} \quad \checkmark$$

$\Leftarrow \quad y=x$ פתרון סינגולרי.

נמצא פתרון:

$$\ln|1-\frac{y}{x}|+\frac{1}{4}\ln|\frac{y}{x}+3|-\frac{5}{4}\ln|x|=c$$

$$\ln|1-\frac{y}{x}|+\frac{1}{4}\ln|\frac{y}{x}+3|-\frac{5}{4}\ln|x|=c+\ln|x|$$

$$\ln|1-\frac{y}{x}|+\frac{1}{4}\ln|\frac{y}{x}+3|-\frac{5}{4}\ln|\frac{y}{x}|=c$$

$$\ln|(1-\frac{y}{x})(\frac{y}{x}+3)^{\frac{1}{4}}(\frac{y}{x})^{-\frac{5}{4}}|=c$$

$$\ln|(\frac{x-y}{x})(\frac{y+3x}{x})^{\frac{1}{4}}(\frac{x}{y})^{\frac{5}{4}}|=c$$

$$\ln|\frac{x-y}{x}\cdot\frac{(y+3x)^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{x^{\frac{5}{4}}}{y^{\frac{5}{4}}}|=c$$

$$\ln|\frac{x-y}{y}\cdot\frac{(y+3x)^{\frac{1}{4}}}{y^{\frac{1}{4}}}|=c$$

$$\ln|\frac{x-y}{y}\cdot\sqrt[4]{\frac{y+3x}{y}}|=c$$

$$\ln|\frac{x-y}{y}\cdot\sqrt[4]{\frac{y+3x}{y}}|=c$$

פתרון סופי:

$$\ln|\frac{x-y}{y}\cdot\sqrt[4]{\frac{y+3x}{y}}|=c \quad , \quad y=x \quad , \quad y=-3x$$

ג.

$$y^2 + x^2 y' = xyy'$$

פתרון:

$$y^2 = (xy - x^2)\cdot y'$$

$$y' = \frac{y^2}{xy - x^2}$$

⇐ הפונקציה הומוגנית

נעלה את המונה והמכנה בריבוע כך ש- $x^2 \neq 0$

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1}$$

נסמן- $\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = x\cdot z \Rightarrow y' = z + x\cdot z'$

נציב ונקבל-

$$z + x\cdot z' = \frac{z^2}{z-1}$$

$$x\cdot z' = \frac{z^2}{z-1} - z$$

$$x\cdot z' = \frac{z^2 - z^2 + z}{z-1}$$

$$x\cdot z' = \frac{z}{z-1}$$

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{z}{z-1}$$

$$\int \frac{z-1}{z}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx \qquad (z \neq 0)$$

במידע ונשמור גם $z = 0 \Rightarrow y = 0$ פתרון למשוואה.

$$\int \frac{z-1}{z}\,dz = \int 1 - \frac{1}{z}\,dz = z - \ln|z| + C$$

$$\Rightarrow \quad z - \ln|z| = \ln|x| + C$$

נציב ונעביר אגפים ונקבל:

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right| - \frac{x}{y} = \ln|x| + C$$

נשים לב ש $y=0$ פתרון סינגולרי:

$$y' = \frac{y^2}{xy - x^2}$$

$$\frac{0}{0 \cdot x - x^2} \overset{?}{=} 0 \quad \checkmark$$

$\Leftarrow$ $y=0$ פתרון סינגולרי.

פתרון כללי:

$$\boxed{\ln\left|\frac{x}{y}\right| - \frac{x}{y} = \ln|x| + C, \quad y = 0}$$

ב.

$$(3xy + y^2)\,dx + (x^2 + xy)\,dy = 0$$

פתרון:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{(2y + 3x)}{(x + 2x)}$$

נשים לב שזו משוואה הומוגנית:

נניח כי $x^2 \neq 0$

$$y' = \frac{-3\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 + \frac{y}{x}}$$

נסמן $z = \frac{y}{x} \Leftarrow y = z \cdot x \Rightarrow y' = z' \cdot x + z$

נציב למעלה

$$z' \cdot x + z = \frac{-3z - z^2}{1+z}$$

$$z' \cdot x = \frac{-3z - z^2 - z - z^2}{1+z} = \frac{-2z^2 - 4z}{1+z}$$

$$\frac{dz}{dx} x = \frac{-2z(z+2)}{1+z}$$

$$\int \frac{1+z}{-2z(z+2)} dz = \int \frac{1}{x} dx \qquad (z \neq 0, -2)$$

נשים לב כי $z = 0 \Leftarrow y = 0$ הוא פתרון סינגולרי

$z = -2 \Leftarrow y = -2x$ הוא פתרון סינגולרי

$$\frac{1+z}{-2z(z+2)} = \frac{A}{-2z} + \frac{B}{z+2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{-1}{4}$$

$$\int \frac{1+z}{-2z(z+2)} dz = \int -\frac{1}{4z} - \frac{1}{4(z+2)} dz$$

$$\left|(2+z)\cdot z\right| \ln\frac{1}{4} = \left|2+z\right| \ln\frac{1}{4} - \left|z\right| \ln\frac{1}{4} =$$

ולכן הפתרון הסתומה הוא -

$$\boxed{\left|\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right)\right)\right| \ln\frac{1}{4} = \left|x\right| \ln + C}$$

עתה נבדוק:

$y = -2x$ הישרים הנ"ל הם $y = 0$ ו- $x = 0$ נמצא:

פתרון סופי:

$$\boxed{y = 0,\ x = -\frac{y}{2},\ \left|\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right)\right)\right| \ln\frac{1}{4} = \left|x\right| \ln + C}$$

פתרון נוסף:

ב. $\left(x - y\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx + x\cos\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$

פתרון הומוגני מסדר 2.

7. $(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0$

כשנקבל

$$x' = \frac{dx}{dt} = -\frac{(2x^2t - 2x^3)}{(4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)}$$

נשים לב שהמשוואה הומוגנית.

$$x' = \frac{-2x^2t + 2x^3}{4x^3 - 6x^2t + 2xt^2}$$

נניח כי- $t^3 \neq 0$

$$x' = \frac{-2\left(\frac{x}{t}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{t}\right)^3}{4\left(\frac{x}{t}\right)^3 - 6\left(\frac{x}{t}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{t}\right)}$$

נסמן- $z = \frac{x}{t} \Leftarrow x = z \cdot t \Rightarrow x = z't + z$

נציב ונקבל-

$$z't + z = \frac{-2z^2 + 2z^3}{4z^3 - 6z^2 + 2z}$$

$$\vdots$$

$$z't = \frac{-4z^4 + 8z^3 - 4z^2}{4z^3 - 6z^2 + 2z}$$

$$\frac{dz}{dt}t = \frac{-4z^4 + 8z^3 - 4z^2}{4z^3 - 6z^2 + 2z}$$

$$\frac{dz}{dt}t = \frac{-4z^2(z^2 - 2z + 1)}{2z \cdot (2z^2 - 3z + 1)}$$

$$\int \frac{2z\cdot(2z^2-3z+1)}{-4z^2\cdot(z^2-2z+1)} = \int \frac{1}{t}\,dt \qquad (z\neq 0,1)$$

$$\frac{2z\cdot(2z^2-3z+1)}{-4z^2\cdot(z^2-2z+1)} = \frac{2z^2-3z+1}{-2z\cdot(z-1)^2} = \frac{2\left(z-\frac{1}{2}\right)\cdot(z-1)}{-2z\cdot(z-1)^2}$$

$$= \frac{z-\frac{1}{2}}{-z\cdot(z-1)} = \frac{A}{-z} + \frac{B}{z-1}$$

$$A=\frac{1}{2}\ ,\ B=-\frac{1}{2} \qquad \Leftarrow$$

$$\int \frac{z-\frac{1}{2}}{-z\cdot(z-1)}\,dz = \int -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1}\,dz =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|z| - \frac{1}{2}\ln|z-1| = -\frac{1}{2}\ln\left|z^2-z\right|$$

(תנאי שמירה שכחתי)

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{x}{t}\right)^2-\left(\frac{x}{t}\right)\right| = \ln|t| + C$$

על ידי הפיכה נקבל את השוויון שכן

$z=0 \Leftarrow x(y)=0$ מכיוון ופונקציה

$z=1 \Leftarrow x(y)=y$ מכיוון ופונקציה

מכיוון סה"כ

$$y=x(t),\ x(t)=0,\ -\frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{t}{x}\right)^2-1\right|=\ln|t|+C$$

שאלה 3:

השתמשו בשיטה הנכונה כדי לפתור את המשוואה:

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0$$

פתרו אותן.

ג.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+x+1}{y+x+2}$$

פתרון:

$$\begin{cases} y+x+1=0 \\ y+x+2=0 \end{cases}$$ שני ישרים מקבילים,

נסמן- $y+x+1=z \Rightarrow y=z-x-1 \Rightarrow y'=z'-1$

נציב ונקבל-

$$z'-1=\frac{z}{z+1}$$

$$z'=\frac{z}{z+1}+1=\frac{z+1+z}{z+1}=\frac{1+2z}{z+1}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1+2z}{z+1}$$

$$\int\frac{z+1}{1+2z}dz=\int dx \qquad \left(z\neq-\frac{1}{2}\right)$$

(שים לב כי $z=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=-\frac{2}{3}-x$ פתרון מיוחד)

$$\int \frac{1+z}{2z+1}\,dz = \frac{1}{2}\int \frac{2+2z}{1+2z}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1+2z+1}{2z+1}\,dz = \frac{1}{2}\int 1 + \frac{1}{1+2z}\,dz$$

$$= \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\ln|1+2z|$$

נחזור למשתנים המקוריים:

$$\boxed{\frac{1}{2}(1+x+y) + \frac{1}{4}\ln|2(1+x+y)+1| = x + C}$$

לפי הפתרון שקיבלנו $y = -\frac{3}{2} - x$ פתרון נוסף שמקיים

פתרון סינגולרי:

$$\boxed{\frac{1}{2}(1+x+y) + \frac{1}{4}\ln|2(1+x+y)+1| = x + C,\quad y = -\frac{3}{2} - x}$$

$$(x+2y+3)\,dx+(2x+4y-1)\,dy=0$$

פתרון:

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{(x+2y+3)}{2x+4y-1}$$

נקודות קריטיות:

$$\begin{cases}-x-2y-3=0\\ 2x+4y-1=0\end{cases}$$

$$z=x+2y+3 \quad \text{(נסמן)}$$

$$y=\frac{z-x-3}{2}$$

$$y'=\frac{z'}{2}-\frac{1}{2}$$

נציב למעלה:

$$\frac{z'}{2}-\frac{1}{2}=\frac{-z}{2z-7}$$

$$\frac{z'}{2}=\frac{-z}{2z-7}+\frac{1}{2}=\frac{-2z+2z-7}{4z-14}=\frac{-7}{4z-14}$$

$$z'=\frac{-7}{2z-7}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{7}{7-2z}$$

$$\int\frac{7-2z}{7}\,dz=\int dx$$

$$z-\frac{z^2}{7}=x+C$$

נחזיר למשתנים הקודמים -

$$3+x = \frac{(x+2y+3)^2}{7} - 3+2y+x$$

$$\boxed{7C = (x+2y+3)^2 - 14y - 21}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x-y-4}$$

במידע:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

שני הישרים נחתכים $\begin{cases} 2y-x+5=0 \\ 2x-y-4=0 \end{cases}$ I

נמצא את נקודת החיתוך של שני הישרים

$$x=1,\ y=-2$$

$\Leftarrow$ נעביר את נקודת החיתוך של שני הישרים לראשית הצירים

$$\begin{cases} x_1 = x-1 \\ y_1 = y+2 \end{cases}$$

$\Leftarrow$

$$\begin{cases} x = x_1+1 \\ y = y_1-2 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1} \end{cases}$$

נציב ונקבל -

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{2(y_1-2) - (x_1+1) + 5}{2(x_1+1) - (y_1-2) - 4}$$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{2y_1 - x_1}{-y_1 + 2x_1}$$

כעת נפעיל הומוגניות:

נניח ש- $x_1 \neq 0$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{2\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - 1}{-\left(\frac{y_1}{x_1}\right) + 2}$$

נסמן- $z = \frac{y_1}{x_1}$ $\Leftarrow$ $y_1 = z \cdot x_1$ $\Leftarrow$ $y_1' = z' \cdot x_1 + z$

נציב ונקבל-

$$z' \cdot x_1 + z = \frac{2z - 1}{-z + 2}$$

$$z' \cdot x_1 = \frac{2z - 1}{-z + 2} - z = \frac{2z - 1 + z^2 - 2z}{-z + 2} = \frac{z^2 - 1}{-z + 2}$$

$$\frac{dz}{dx_1} x_1 = \frac{z^2 - 1}{-z + 2}$$

$$\int \frac{-z + 2}{z^2 - 1} dz = \int \frac{1}{x_1} dx_1 \qquad (z \neq 1, -1)$$

(שוכח לבדוק מה קורה עם $z = 1$ $\Leftarrow$ $y_1 = x_1$ $\Leftarrow$ $y = x - 3$

$z = -1$ $\Leftarrow$ $y_1 = -x_1$ $\Leftarrow$ $y = -x - 1$

בהרצאה יעשו זאת.)

$(z-1)(z+1)$

$$\frac{-z+2}{z^2-1} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1}$$

$$-z+2 = A\cdot(z+1) + B\cdot(z-1)$$

נציב ערכים שקפצים:

$$\begin{cases} -1 = A+B \\ 2 = A-B \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{3}{2}$$

$$\int \frac{-z+2}{z^2-1}\,dz = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{z+1}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|z-1| - \frac{3}{2}\ln|z+1|$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\ln|z-1| - \frac{3}{2}\ln|z+1| = \ln|x_1| + C$$

נחזיר משתנים במקור"ם:

$$\boxed{\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}-1\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}+1\right| = \ln|x-1| + C}$$

$$\boxed{y = x-3 \quad , \quad y = -x-1}$$

נתון לנו שני פתרונות שמקיימים

המשוואה <u>ונפלים</u> משמאל.

ב.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3+x+2y}{1+x+y}$$

פתרון:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+x+y}{3+x+2y}$$

$$\begin{cases} 1+x+y=0 \\ 3+x+2y=0 \end{cases} \Leftarrow \text{שני הישרים מקבילים} \quad \left|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}\right| \neq 0$$

נמצא את נקודת החיתוך של שני הישרים:

$$x = 1, \quad y = -2$$

נעביר את נקודת החיתוך של שני הישרים לראשית הצירים:

$$\begin{cases} x_1 = x-1 \\ y_1 = y+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_1+1 \\ y = y_1-2 \end{cases} \Rightarrow dy = dy_1 \quad dx = dx_1$$

נציב ונקבל:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{2-y_1+1+x_1+1}{4-2y_1+1+x_1+3} = \frac{y_1+x_1}{2y_1+x_1}$$

$\Leftarrow$ קיבלנו משוואה הומוגנית

נעלק ב- $x_1 \neq 0$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{1+\left(\frac{y_1}{x_1}\right)}{2\left(\frac{y_1}{x_1}\right)+1}$$

$$y_1' = z' \cdot x_1 + z \quad \Leftarrow \quad y_1 = z \cdot x_1 \quad \Leftarrow \quad z = \frac{y_1}{x_1}$$

נציב

$$z' \cdot x_1 + z = \frac{1+z}{1+2z}$$

$$z' \cdot x_1 = \frac{1+z}{1+2z} - z = \frac{1+z-z-2z^2}{1+2z} = \frac{1-2z^2}{1+2z}$$

$$\frac{dz}{dx_1} x_1 = \frac{1-2z^2}{1+2z}$$

$$\int \frac{1+2z}{1-2z^2} dz = \int \frac{1}{x_1} dx \qquad \left(z \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

נמשך לפונקציה אם

$$y = \frac{x-1}{\sqrt{2}} - 2 \quad \Leftarrow \quad y_1 = \frac{x_1}{\sqrt{2}} \quad \Leftarrow \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{-x+1}{\sqrt{2}} - 2 \quad \Leftarrow \quad y_1 = -\frac{x_1}{\sqrt{2}} \quad \Leftarrow \quad z = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

נפרק לשברים חלקיים

$$\Leftarrow$$

$$\frac{1+2z}{1-2z^2} = \frac{A}{(1-\sqrt{2}z)} + \frac{B}{(1+\sqrt{2}z)}$$

$$A = \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}, \quad B = \frac{\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}} \quad \Leftarrow$$

$$\int \frac{1+2z}{1-2z^2} dz = \frac{1}{4}\left[-(2+\sqrt{2}) \ln\left|\sqrt{2}-2z\right| + (-2+\sqrt{2}) \ln\left|\sqrt{2}+2z\right|\right]$$

⇐ נחזיר למשתנים המקוריים:

$$\frac{1}{4}\left[-(2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}-2\left(\frac{y+2}{x-1}\right)\right|+(-2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}+2\left(\frac{y+2}{x-1}\right)\right|\right]=\ln|x-1|+C$$

נציב תנאי התחלה ונקבל את הפתרון:

$$y=\frac{-x+1}{\sqrt{2}}-2,\quad y=\frac{x-1}{\sqrt{2}}-2$$

3. פתרו את המשוואות הבאות:

$$(2x+y-3)dx+(x+y-1)dy=0$$

פתרון:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(2x+y-3)}{x+y-1}=\frac{-2x-y+3}{1-y+x}$$

נמצא נקודות חיתוך:

$$\begin{cases}-2x-y+3=0\\ x+y-1=0\end{cases}\qquad \begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\neq 0$$

נמצא את נקודת החיתוך:

$$x=2,\quad y=-1$$

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{dy}{dx}\Leftarrow\begin{cases}x=x_1+2\\ y=y_1-1\end{cases}\Leftarrow\begin{cases}x_1=x-2\\ y_1=y+1\end{cases}$$

נציב ונקבל:

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{-2(x_1+2)-(y_1-1)+3}{x_1+2+y_1-1-1}=\frac{-2x_1-y_1}{x_1+y_1}$$

נניח כי $x_1 \neq 0$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{-2-\left(\frac{y_1}{x_1}\right)}{1+\left(\frac{y_1}{x_1}\right)}$$

נסמן $z = \frac{y_1}{x_1}$ $\Leftarrow$ $y_1 = z \cdot x_1$ $\Leftarrow$ $y_1' = z' \cdot x_1 + z$

נציב ונקבל:

$$z' \cdot x_1 + z = \frac{-2-z}{1+z}$$

$$z' \cdot x = \frac{-2-z}{1+z} - z = \frac{-2-z-z-z^2}{1+z} = \frac{-(z^2+2z+2)}{1+z}$$

$$\frac{dz}{dx} x = \frac{-(z^2+2z+2)}{1+z}$$

$$\int \frac{1+z}{-(z^2+2z+2)}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$(z^2+2z+2 \neq 0)$

$$\int \frac{1+z}{-(z^2+2z+2)}\,dz = \int -\frac{1}{2}\frac{(2z+2)}{(z^2+2z+2)}\,dz = -\frac{1}{2}\ln(z^2+2z+2)$$

$\Leftarrow$ נחזיר למשתנים המקוריים –

$$-\frac{1}{2}\ln\left(2+2\left(\frac{y+1}{x-2}\right)+\left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right) = \ln|x-2| + C$$

תרגיל מצא את הפתרון הכללי של המד"ר

א. $\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x$

פתרון

(נכפיל ב-$u(x)$ כך ש-)

$$(uy)' = u'y + uy' = 2xuy + uy'$$

$$uy' + u'y = 2xuy + uy'$$

$$u'y = 2xuy$$

$$u' = 2xu$$

$$\frac{du}{dx} = 2xu$$

$$\int \frac{1}{u} du = \int 2x\, dx$$

$$\ln|u| = x^2 + \ln|c|$$

$$u = c \cdot e^{x^2}$$

נכפיל את המשוואה ב-

$$\underbrace{uy' + 2xuy}_{(uy)'} = 4xu$$

$$(\mu y)' = 4\mu x$$

$$\mu_0 \cdot e^{x^2} y = \int 4\mu_0 e^{x^2} \cdot x\,dx$$

μ_0 מספר קבוע ⇐

$$\mu_0 e^{x^2} y = 4\mu_0 \int e^{x^2} \cdot x\,dx$$

הצבה ↓

$$t = x^2$$

$$dt = 2x\,dx$$

$$e^{x^2} \cdot y = 2e^{x^2} + C$$

$$\boxed{y = 2 + C \cdot e^{-x^2}}$$

⇐ .2

$$x^3 y' + (2 - 3x^2) y = x^3$$

.a

הערה:

נתון כי $x^3 \neq 0$

$$y' + \frac{(2-3x^2)}{x^3} y = 1$$

נכפול ב- μ ונקבל

$$\mu y' + \mu \frac{(2-3x^2)}{x^3} y = (\mu y)'$$

⇐

$$\mu' = \mu \frac{(2-3x^2)}{x^3}$$

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu \frac{(2-3x^2)}{x^3}$$

$$\int \frac{1}{\mu} d\mu = \int \frac{2-3x^2}{x^3} dx$$

$$\ln|\mu| = -\frac{1}{x^2} - \ln|x^3| + \ln|\mu_0|$$

$$\mu = \mu_0 \cdot e^{-\frac{1}{x^2} - \ln|x^3|} = \mu_0 \cdot \left(\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}\right)$$

נכפיל את המשוואה ב $\mu(x)$

$$\mu y' + \mu\left(\frac{2-3x^2}{x^3}\right) y = \mu$$

$$(\mu y)' = \mu$$

$$\mu_0 \cdot \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} y = \int \mu_0 \cdot \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx$$

נציב בצד ימין

$$t = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$dt = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} dx$$

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} y = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{x^2}} + C$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2} x^3 + C \cdot x^3 \cdot e^{\frac{1}{x^2}}}$$

$$y' - 2y\cot X = 1$$

פתרון:

נכפול ב- $\mu(x)$ (נחזור)

$$\mu y' - 2\mu y\cot(x) = (\mu y)'$$

$$\mu' = -2\mu\cot(x) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d\mu}{dx} = -2\mu\cot(x)$$

$$\int \frac{1}{\mu} d\mu = \int -2\cot(x)\,dx$$

$$\ln|\mu| = -2\ln|\sin(x)| + \ln|\mu_0|$$

$$\mu = \frac{\mu_0}{\sin^2(x)}$$

נכפול $\mu(x)$ במשוואה:

$$\mu y' - 2\mu y\cot(x) = \mu$$

$$(\mu y)' = \mu$$

$$\frac{\mu_0}{\sin^2(x)} y = \int \frac{\mu_0}{\sin^2(x)}\,dx$$

$$\left(-\cot(x)\right)' = \left(\frac{-\cos(x)}{\sin(x)}\right)' = \frac{\sin(x)\cdot\sin(x) + \cos(x)\cdot\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

$$= \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(x)}$$

$$\frac{1}{\sin^2(x)}\,y = -\cot(x) + C \quad \Leftarrow$$

$$\boxed{y = \sin^2(x)\cdot\left[-\cot(x) + C\right]}$$

$$y' = -3y\cdot tg(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = -3y\,tg(x)$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int -3tg(x)\,dx \qquad (y\neq 0)$$

$$\ln|y| = 3\ln|\cos(x)| + \ln|c|$$

$$y = c\cdot\cos^3(x),\ c\neq 0 \quad \Leftarrow \quad y = \pm c\cdot\cos^3(x)$$

$y=0$ פתרון נוסף $\Leftarrow$ פתרון סופי: $\boxed{y = c\cdot\cos^3(x)}$ עבור