סדרת תרגיל מס' 1 - משוואות דיפרנציאליות

פתרון:

(1) $\frac{dy}{dx} - x^2 = 0$

סדר 1, לינארי, עם מקדמים קבועים.

(2) $\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = -2$

סדר 1, לא לינארי.

(3) $x^2 = y + x\frac{dy}{dx} + 2\frac{d^2y}{dx^2}$

סדר 2, לינארי, עם מקדמים משתנים.

(4) $xy''' + y^2 = \sin x$

סדר 3, לא לינארי.

(5) $y^{(n)} + xy' + 3y = x$

סדר n, לינארי עם מקדמים קבועים.

(6) $y^{(7)} + 25y^{(8)} - 34xy''' + 19y = \sin x$

סדר 8, לא לינארי.

Scanned by CamScanner

שאלה 2:

א. (N3) את $y'(x)$

$$y(x) = e^{4x}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y'(x) = 4 \cdot e^{4x}}$$

נציב את y, y' במש"ל

$$y' - 4y = 4 \cdot e^{4x} - 4 \cdot \left(e^{4x}\right) = 0 \quad \checkmark$$

$\Leftarrow$ $y(x) = e^{4x}$ מקיים את המש"ל ופתרון

$\Leftarrow$ לכן הוכח פתרון של המשוואה הדיפרנציאלית הנתונה.

ב. (N3) את $y''(x)$ ל- $y'(x)$

$$y(x) = C_1 \cdot e^{2x} \cdot \sin x + C_2 \cdot e^{2x} \cdot \cos x$$

$$\Downarrow$$

$$y'(x) = C_1 \cdot \left(2 \cdot e^{2x} \cdot \sin x + e^{2x} \cdot \cos x\right) + C_2 \cdot \left(2e^{2x} \cdot \cos x - e^{2x} \cdot \sin x\right)$$

$$= 2C_1 \cdot e^{2x} \cdot \sin x + C_1 \cdot e^{2x} \cdot \cos x + 2C_2 \cdot e^{2x} \cdot \cos x - C_2 \cdot e^{2x} \cdot \sin x =$$

$$= \boxed{(2C_1 - C_2) \cdot e^{2x} \cdot \sin x + (C_1 + 2C_2) \cdot e^{2x} \cdot \cos x}$$

Scanned by CamScanner

$$y''(x) = (2c_1 - c_2)\left(2e^{2x}\cdot\sin x + e^{2x}\cdot\cos x\right) + (c_1 + 2c_2)\cdot\left(2e^{2x}\cdot\cos x - e^{2x}\cdot\sin x\right) =$$

$$= (4c_1 - 2c_2)\cdot e^{2x}\cdot\sin x + (2c_1 - c_2)\cdot e^{2x}\cdot\cos x + (2c_1 + 4c_2)\cdot e^{2x}\cdot\cos x - (c_1 + 2c_2)\cdot e^{2x}\cdot\sin x =$$

$$= \boxed{(3c_1 - 4c_2)\cdot e^{2x}\cdot\sin x + (4c_1 + 3c_2)\cdot e^{2x}\cdot\cos x}$$

→ 2"נגזרת $y''(x)$, $y'(x)$ את מצאנו

$$y'' - 4y' + 5y = (3c_1 - 4c_2)\cdot e^{2x}\cdot\sin x + (4c_1 + 3c_2)\cdot e^{2x}\cdot\cos x$$

$$- 4\cdot\left[(2c_1 - c_2)\cdot e^{2x}\cdot\sin x + (c_1 + 2c_2)\cdot e^{2x}\cdot\cos x\right] +$$

$$5\cdot\left[c_1\cdot e^{2x}\cdot\sin x + c_2\cdot e^{2x}\cdot\cos x\right] =$$

$$= (3c_1 - 4c_2)\cdot e^{2x}\cdot\sin x + (4c_1 + 3c_2)\cdot e^{2x}\cdot\cos x -$$

$$(8c_1 - 4c_2)\cdot e^{2x}\cdot\sin x - (4c_1 + 8c_2)\cdot e^{2x}\cdot\cos x +$$

$$5c_1\cdot e^{2x}\cdot\sin x + 5\cdot c_2\cdot e^{2x}\cdot\cos x =$$

$$= (3c_1 - 4c_2)\cdot e^{2x}\cdot\sin x - (8c_1 - 4c_2)\cdot e^{2x}\cdot\sin x +$$

$$5\cdot c_1\cdot e^{2x}\cdot\sin x + (4c_1 + 3c_2)\cdot e^{2x}\cdot\cos x - (4c_1 + 8c_2)\cdot e^{2x}\cdot\cos x$$

$$+ 5\cdot c_2\cdot e^{2x}\cdot\cos x =$$

Scanned by CamScanner

$$= (3C_1 - 4C_2 - 8C_1 + 4C_2 + 5C_1) \cdot e^{2x} \cdot \sin x +$$

$$(4C_1 + 3C_2 - 4C_1 - 8C_1 + 5C_2) \cdot e^{2x} \cdot \cos x =$$

$$= 0 \cdot e^{2x} \cdot \sin x + 0 \cdot e^{2x} \cdot \cos x = 0$$

✓

$$y(x) = C_1 \cdot e^{2x} \cdot \sin x + C_2 \cdot e^{2x} \cdot \cos x$$ ⇐ ולכן-

$y'' - 4y' + 5y = 0$ המשוואה הדיפרנציאלית המתאימה-

ג. (נמצא) את $y'(x)$ ו- $y''(x)$

$$y(x) = -3 \cdot e^{x} + 2 \cdot e^{3x}$$

⇓

$$y'(x) = -3 \cdot e^{x} + 6 \cdot e^{3x}$$

$$y''(x) = -3 \cdot e^{x} + 18 \cdot e^{3x}$$

נציב את $y''(x)$ ו- $y'(x)$ במשוואה הדיפרנציאלית-

$$y'' - 4y' + 3y = -3e^{x} + 18e^{3x} - 4(-3e^{x} + 6e^{3x}) + 3(-3e^{x} + 2e^{3x}) =$$

$$= (-3 + 12 - 9) \cdot e^{x} + (18 - 24 + 6) \cdot e^{3x} = 0 \cdot e^{x} + 0 \cdot e^{3x} = 0$$

✓

Scanned by CamScanner

פתרון, $y(x)=-3e^{x}+2e^{3x}$ הוא פתרון

של המשוואה הדיפרנציאלית $y''-4y'+3y=0$.

נמצא תנאים שיספקו את הפתרון $y(x)$ שעונה

על התנאים:

$$y(0)=-3\cdot e^{0}+2\cdot e^{3\cdot 0}=-3+2=-1 \quad \checkmark$$

$$y'(0)=-3\cdot e^{0}+6\cdot e^{3\cdot 0}=-3+6=3 \quad \checkmark$$

לכן, $y(x)=-3e^{x}+2e^{3x}$ הוא פתרון המקיים

את התנאים הנתונים.

שאלה 3

א.

$$y'=-2xy^{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=-2xy^{2}$$

נפריד את המשתנים:

$$\frac{1}{y^{2}}dy=-2x\,dx \qquad (y\neq 0)$$

Scanned by CamScanner

(6)

נפתור את המשוואה ע"י הפרדת משתנים:

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int -2x\,dx$$

$$-\frac{1}{y} = -x^2 + C$$

$$\boxed{y = \frac{1}{x^2 + C}} \Leftarrow$$

נבדוק אם $y = 0$ הוא פתרון של המשוואה:

$$0 = -2x \cdot 0^2$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

$\boxed{y \equiv 0}$ פתרון נוסף של המשוואה. $\Leftarrow$

$$\boxed{y = \frac{1}{x^2 + C} \quad , \quad y \equiv 0} \Leftarrow$$

Scanned by CamScanner

(7)

ב.

$$y' = \frac{4y}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x}$$

נפריד את המשתנים:

$$\frac{1}{y}dy = \frac{4}{x}dx \qquad (y \neq 0)$$

(כיון שמתקיים גם $y = 0$, כלל הפונקציה $y \equiv 0$ הוא פתרון המשוואה)

$\Leftarrow$ נמשיך בחישובים ונפעיל אי"ס על שני אגפי המשוואה:

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{4}{x}dx$$

$$\ln|y| = 4 \cdot \ln|x| + C$$

$$\ln|y| = \ln x^4 + C$$

$$|y| = e^{\ln x^4 + C} = e^{\ln x^4} \cdot e^C = x^4 \cdot e^C \Leftarrow$$

$$y = \pm e^C \cdot x^4 \Leftarrow$$

Scanned by CamScanner

ג)

$$y = \pm C \cdot x^4 \quad , \quad C \neq 0$$

⇐

* נשים לב כי גם $y \equiv 0$ הינו פתרון למשוואה

$$\frac{0 \cdot 4}{x} = 0 \quad \checkmark$$

⇐ ולכן, $\boxed{y \equiv 0}$ הינו פתרון למשוואה.

עוד לפני שאנו מדברים $C = 0$ מקבלים $y = 0 \cdot x^4 = 0$

ולכן הפתרון הכללי הינו: $\boxed{y = C \cdot x^4}$, לכל C

ב.

$$y' = \frac{\sec x \cdot tg x}{5y^4 + 2e^{2y}}$$

y לכל $5y^4 + 2e^{2y} \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec x \cdot tg x}{5y^4 + 2e^{2y}}$$

Scanned by CamScanner

נתון: משוואה דיפרנציאלית

$$5y^4 + 2e^{2y}\,dy = \sec x \cdot \tan x\,dx$$

נתון: אינטגרציה לשני האגפים

$$\int 5y^4 + 2e^{2y}\,dy = \int \sec x \cdot \tan x\,dx$$

$$y^5 + e^{2y} = \sec x + C$$

נתון תנאי התחלה ומציאת C

$$y(0) = 3$$

$$243 + e^6 = 1 + C$$

$$\boxed{C = e^6 + 242} \Leftarrow$$

$$\boxed{y^5 + e^{2y} = \sec x + e^6 + 242} \Leftarrow$$

Scanned by CamScanner