פתרון תרגיל 01

שאלה 1: $y'' + x(y')^2 = 0$, $y'(0)=2$, $y(0)=1$.

נגדיר $p = y' \Rightarrow p' = y''$

$$p' + xp^2 = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = -xp^2$$

ס"ו הפרדת משתנים נקבל

$$\int \frac{dp}{p^2} = \int x\,dx \qquad p \neq 0$$

$$-\frac{1}{p} = -\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow p = \frac{2}{x^2+c}$$

$$y' = p = \frac{2}{x^2+c} \Rightarrow y = \int \frac{2}{x^2+c}\,dx = \frac{2}{\sqrt{c}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{c}}\right) + c_1$$

לשבוע c ו c_1 נציב תנאי ההתחלה ונקבל:

$$y'(0) = 2 \Rightarrow \frac{2}{0^2+c} = 2 \Rightarrow c = 1$$

כלומר:

$$y(x) = 2\operatorname{arctg}(x) + c_1$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow 2\operatorname{arctg}(0) + c_1 = 1 \Rightarrow \boxed{c_1 = 1}$$

לכן $y(x) = 2\operatorname{arctg}(x) + 1$

שאלה 2:

$$x^2 y'' - x(x+2)y' + (2+x)y = 0$$

אז $y(x) = xe^x$, $y'(x) = xe^x + e^x$, $y''(x) = e^x(2+x)$

נציב במשוואה הנתונה:

$$= xe^x(2+x) + (1+x)e^x)(2+x)x - (e^x(2+x))x^2$$

$$= (x + (1+x)x - x^2)(2+x)e^x = 0$$

לכן xe^x פתרון למשוואה הנתונה.

ב. נמצא את הוורונסקיאן.

מצאנו ב(א) כי xe^x פתרון למשוואה, אז נחפש פתרון נוסף מהצורה $y = xe^x z$

נגזור פתרון זה ונציב במקור $y = xe^x z$, $y' = e^x z + xe^x z + xe^x z'$

$$y'' = e^x z + e^x z + xe^x z + e^x z' + xe^x z' + xe^x z''$$

נציב במשוואה הנתונה:

$$x^2(2e^x z + 2xe^x z' + xe^x z'') - x(x+2)(e^x z + xe^x z + xe^x z') + (2+x)xe^x z = 0$$

מתקיים $x^3 \neq 0$

$$x^3 z'' - x^3 z' = 0 \iff z'' - z' = 0$$

נציב $z' = p \Rightarrow z'' = p'$:

$$p' - p = 0 \iff \frac{dp}{dx} = p \iff \text{הפרדת משתנים} \iff \int \frac{dp}{p} = \int dx$$

$p \neq 0$:

$$\ln|p| = x + c \Rightarrow p = e^x e^c$$

$p = 0$ גם פתרון.

$$z' = p \Rightarrow z' = ce^x \Rightarrow z = ce^x + c_1$$

נמצא y :

$$y = xz \Rightarrow y = x(ce^x + c_1)$$

<u>שאלה 3</u> : $xy'' + y' - y = 0$ נתון $x_0 = 0$.

נבדוק את המשוואה:

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x}y = 0$$

כאן $x = 0$ נקודה סינגולרית, נבדוק אם היא סינגולרית כיבולנית. $Q(x) = -\frac{1}{x}$, $P(x) = \frac{1}{x}$

$$x \cdot \frac{P}{x} = 1$$

$$-x^2 \cdot \frac{1}{x} = -x$$

אנליטיות בנקודה $x = 0$ לכן נקודה סינגולרית כיבולנית.

נחפש פתרון בצורת טור חזקות מוכלל מהצורה:

$$y(x)=\sum a_n x^{n+r} \qquad , a_0\neq 0$$

$$y'=\sum (n+r)\,a_n x^{n-1+r} \qquad , y''=\sum (n+r)(n-1+r)\,a_n x^{n-2+r}$$

נציב y ונצמצם במשפט הנתונה:

$$0=\sum a_n x^{n+r}-\sum (n+r)\,a_n x^{n-1+r}+\sum (n+r)(n-1+r)\,a_n x^{n-2+r}$$

$$=\sum a_n x^{n+r}-\sum (n+r)\,a_n x^{n-1+r}+\sum (n+r)(n-1+r)\,a_n x^{n-1+r}$$

$$0=\sum a_n x^{n+r}-\sum \Big((n+r)+(n-1+r)(n+r)\Big)\,a_n x^{n-1+r}$$

נחלק ב x^r ונקבל

$$0=\sum a_n x^{n}-\sum \Big(a_n (n+r)^2\Big)\,x^{n-1}$$

כעת נציב $x=0$ ונקבל $a_0 r^2=0$ ומשם נובעת המשוואת המציינת $r=0$.

עכשיו נמצא כלל כעסיק את a_n המקדמים ונקבל

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{(n+1+r)^2} \iff a_n-a_{n+1}(n+1+r)^2=0$$

$$a_1 = \frac{a_0}{(r+1)^2} \quad , \quad a_2 = \frac{a_0}{(r+1)^2(r+2)^2} \quad , \quad a_3 = \frac{a_0}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2}$$

$$\dots \quad ,$$

נשים לב כי המקדמים נקבעו ע"י a_0 לכן נבחר $a_0 = 1$.

נקבל הפתרון:

$$y(x,r) = x^r \sum a_n x^n = x^r \left(1 + \frac{x}{(r+1)^2} + \frac{x^2}{(r+1)^2(r+2)^2} + \dots \right)$$

נציב $r=0$ ונקבל $y_1(x)$:

$$y(x,r)\Big|_{r=0} = x^0 \left(1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{36} + \frac{x^4}{576} + \dots \right)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{(2!)^2} + \frac{x^3}{(3!)^2} + \frac{x^4}{(4!)^2} + \dots =$$

$$= \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

כדי לקבל את $y_2(x)$ צריך לגזור את $y(x,r)$ לפי r ואז להציב

$r=0$

$$y_2(x) = \frac{\partial y(x,r)}{\partial r}\Big|_{r=0} .$$

שאלה 5:

$x \neq 0$ $\quad y' = x(1-y^2)$, $y(0) = -3$

$$\frac{dy}{dx} = x(1-y^2)$$

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = \int x\,dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{(1-y)(1+y)} = \int x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right)dy = \int x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \frac{x^2}{2} + C \quad \Rightarrow \frac{1+y}{1-y} = Ce^{x^2}$$

נציב $y(0) = -3$:

$$\frac{1-3}{1+3} = Ce^{0^2} \quad \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1+y}{1-y} = -\frac{1}{2}e^{x^2} \quad \Rightarrow 2(1+y) = -(1-y)e^{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad 2 + e^{x^2} = y(e^{x^2} - 2) \quad \Rightarrow \boxed{y = \frac{2+e^{x^2}}{e^{x^2}-2}}$$

נמצא את x שבו $y(x)$ אינו מוגדר כלומר:

$$e^{x^2} - 2 = 0 \quad \Rightarrow e^{x^2} = 2$$

$x^2 = \ln 2 \quad \Rightarrow x_c = \sqrt{\ln 2}$. כלומר $x < \sqrt{\ln 2}$

קיבלנו ביטוי שתלוי רק ב y בלבד. לכן

$$\frac{\mu}{\mu} =$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}}{N} = \frac{y\cos x - x\cos y}{x\cos y - 2y\cos x} = \frac{3y\cos x}{x\cos y - 2y\cos x}$$

נתבונן $\mu = \mu(y)$:

$$\mu' = \mu \cdot \frac{3}{y}$$

$$\ln|\mu| = 3\ln|y| \Rightarrow \mu = y^3$$

(נוכל להשמיט את הערך המוחלט כי אנחנו מחפשים פתרון כללי)

שאלה 9:

א. $y^2\cos x\,dx + (x\sin y\,5 + 4)\,dy = 0$

$\underbrace{\qquad}_{M} \qquad \underbrace{\qquad}_{N}$

נבדוק אם המשוואה המקורית היא מדויקת:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$2y\cos x = \frac{\partial N}{\partial x} \neq x\cos y\,5 = \frac{\partial M}{\partial y}$$

המשוואה אינה מדויקת.

נבדוק אותה למציאת מדויקת, זאת בכדי למצוא μ (גורם האינטגרציה) המתאים.

$$M(y) = e^{\int \frac{3}{y}\,dy} = y^3$$

עכשיו נכפול את המשוואה ב $M(y)$ ונבדוק אם המשוואה מדויקת.

$$\underbrace{y^3(y^2\cos x)}_{M_1}dx + \underbrace{y^3(4+5y\sin x)}_{N_1}dy = 0$$

נבדוק אם כן משוואה מדויקת:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 5y^4\cos x = \frac{\partial N}{\partial x} = 5y^4\cos x$$

כן משוואה מדויקת.

אז נבנה $\psi(x,y)$:

$$\psi(x,y) = \int M_1\,dx = \int y^5\cos x\,dx + C(y)$$

$$\psi(x,y) = y^5\sin x + C(y)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 5y^4\sin x + C'(y)$$

נשווה את N_1:

$$5y^4\sin x + C'(y) = 4y^3 + 5y^4\sin x$$

$$C'(y) = 4y^3 \Rightarrow C(y) = y^4$$

לכן הפתרון:

$$\psi(x,y) = y^5\sin x + y^4$$

כלומר

$$\boxed{y^5\sin x + y^4 = C}$$

ב. נציב בנק' $(1,0)$:

$$1 \cdot \sin 0 + 1 = C \quad \Rightarrow C = 1$$

נפרש בסביבה כלשהי בנק' $(1,0)$ מתקיים:

$$y^5 \sin x + y^4 = 1$$