פתרון תרגיל 8

שאלה מס' 1:

א. $3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0$

נרשום במשוואה:
נחלק ב $3x^2$:

$$y'' + \frac{2}{3x}y' + \frac{y}{3} = 0$$

$P(x) = \frac{2}{3x}$, $Q(x) = \frac{1}{3}$.

$P(x)$ אנליטית בכל נק' , $Q(x)$ אנליטית בכל נק' חוץ מ $x = 0$.

לכן כל הנקודות חוץ מ $x=0$ הן רגולריות ! $x=0$ נק' סינגולרית .

ב. $x^2y'' + xy' + (x+2)y = 0$
נרשום במשוואה:
נחלק ב x^2 :

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{(x+2)}{x^2}y = 0$$

$P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = \frac{x+2}{x^2}$, אנליטית בכל נק' חוץ מ $x=0$.
$x=0$. כל הנקודות חוץ מ $x=0$ רגולריות.
נבדוק אם $(x-0)P(x)$ ו $(x-0)^2Q(x)$ אנליטית:

$x^2 \cdot \left(\frac{x+2}{x^2}\right) = x+2$, $x \cdot \frac{1}{x} = 1$

אנליטיות לכן בנק' $x=0$ סינגולרית כינלרית.

ב. $x^2(x-2)^2y'' + x(x-2)y' + 3x^2y = 0$

נחלק ב $x^2(x-2)^2$:

$$y'' + \frac{(x-2)}{x^2(x-2)^2}y' + \frac{3x^2}{x^2(x-2)^2}y = 0$$

$$y'' + \frac{y'}{x^2(x-2)} + \frac{3y}{(x-2)^2} = 0$$

$$P(x) = \frac{1}{x^2(x-2)} \quad , \quad Q(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

$P(x)$ אנליטית בכל הנקודות חוץ מ: $x=0, 2$.

$Q(x)$ אנליטית בכל הנקודות חוץ מ $x=2$

לכן בכל הנקודות חוץ מ: $x=0, 2$ כינלרית.

בנק' $x=0$ כ"א סינגולרית.

בנק' $x=2$:

$$\frac{1}{x^2(x-2)} \cdot (x-2) = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{(x-2)^2} \cdot (x-2)^2 = 1$$

אנליטית גם בנקודה זו ובפרט ב $x_0=2$:

ולכן בנק' $x=2$ סינגולרית כינלרית.

3. $y'' + (\cos x)y' + (\ln x)y = 0 \quad , \quad x > 0$

אנליטית סביב נק' $x_0 > 0$ כיצד נקבע את הנק', $Q(x) = \ln x$, $P(x) = \cos x$

$x > 0$ כלשהו.

<u>שאלה מס' 2</u>:

א. $y'' + xy' + y = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 0$.

הנק' $x_0 = 0$ נק' רגילה. נ"ל שפתרון של המשוואה סביב

$x = 0$ הוא $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n$

ידוע לנו הבעיה $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

נבקש לחשב $y''(0)$. נזכר במש' הנתונה: $y(0)$, $y'(0)$, $P(x)$, $Q(x)$:

$$y''(0) = -y(0) = -1 \quad \Leftarrow \quad y''(0) + y'(0) \cdot 0 + y(0) = 0$$

נחשב $y'''(0)$. נגזור את המש' הנתונה ונקבל בה $x = 0$:

$$y''' + xy'' + 2y' = 0 \quad \Leftarrow \quad y''' + xy'' + y' + y' = 0$$

$$y'''(0) \quad \Leftarrow \quad y'''(0) + y''(0) \cdot 0 + 2y'(0) = 0$$

נחשב $y^{(4)}(0)$. נגזור את המשוואה שוב פעם ונקבל $x = 0$:

$$y^{(4)} + xy''' + 3y'' = 0 \quad \Leftarrow \quad y^{(4)} + xy''' + y'' + y'' = 0$$

$$y^{(4)}(0) \neq 0 \quad y'''(0) + 3y''(0) = 0 \Rightarrow y^{(4)} = 3$$

ב. $y'' + (\sin x)y' + (\cos x)y = 0$ $\quad y(0)=0,\ y'(0)=1$.

נק' $x_0 = 0$ נק' רגולרית.

נניח שהפתרון בסביבת $x_0=0$ הוא $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n$

ראינו בהרצאה $y(0)=0,\ y'(0)=1$.

נחשב $y''(0)$:

$$y''(0) + \sin(0)\,y'(0) + \cos(0)\,y(0) = 0$$

$$\Rightarrow y''(0) = 0$$

נחשב $y'''(0)$: נגזור את המשוואה ואז נציב $x_0=0$;

$$y''' + (\cos x)y' + \sin x\,y'' - (\sin x)y' + \cos x\,y' = 0$$

$$y''' + 2(\cos x)y' + (-\sin x)y''$$

$$y'''(0) + 2\cos(0)\,y'(0) + (-\sin(0))\,y''(0) = 0$$

$$y'''(0) = -2\cos(0)\,y'(0) = -2$$

נחשב $y^{(4)}(0)$: נגזור את המשוואה שוב כמה ונציב $x_0=0$;

$$y^{(4)} - 2(\sin x)y' + 2(\cos x)y''' + (\cos x)y''' - (\sin x)y'' - (\cos x)y = 0$$

$$y^{(4)} + (\sin x)y''' - 3(\sin x)y' + 3(\cos x)y'' - (\cos x)y = 0$$

$$0 = y(0) - \cancel{0\cdot\cos 0} - y'(0)\cancel{\sin 0} + \cancel{3\cdot 0\cdot\sin 0} + y''(0)\cancel{3\cos 0} + y'''(0)\cancel{\sin 0} + y^{(4)}(0)$$

$$y^{(4)}(0) = y(0) = 0$$

שאלה מס' 3:

א. $$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

כאן $x_0 = 0$ נקודה רגולרית. לכן נניח פתרון מהצורה:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n ,$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad , \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

נציב במשוואה הנתונה:

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

אחרי כפל ואיפוס:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2+n-2)a_n \right) x^n = 0$$

$$\forall n \geq 0 \quad , \quad a_{n+2} = \frac{n^2+n-2}{(n+2)(n+1)} a_n \quad \Leftarrow$$

$$n \geq 0 \quad , \quad a_{n+2} = \frac{n-1}{n+1} a_n$$

$$a_n = \frac{n-3}{n-1} a_{n-2} \quad , n \geq 2$$

כאשר $a_1 = a_1$, $a_0 = a_0$ נקבל

$$a_2 = \frac{2-3}{2-1} a_0 = -a_0 \quad , a_3 = \frac{3-3}{3-1} a_1 = 0$$

$$a_4 = \frac{4-3}{4-1} a_2 = -\frac{1}{3} a_0 \quad , - - - - - -$$

לכן הפתרון הכללי הוא:

$$y(x) = a_0 + a_1 x - a_0 x^2 + 0x^3 - \frac{1}{3} a_0 x^4 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

מ. $y'' - 2x^2 y' + 4xy = x^2 + 2x + 2$, $y(0)=3 \Rightarrow y'(0)=12$

נניח כי $x_0 = 0$ נקי כלשהי, לכן נוכל לפתח את $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ בטור

ונציב במשוואה:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 4x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =$$

$$= x^2 + 2x + 2$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = x^2 + 2x + 2$$

נכפיל את הקבועים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + 4 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = x^2 + 2x + 2$$

נכפיל את הקבועים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + 2a_2 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + 4 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$$

$$= x^2 + 2x + 2$$

מתנאי ההתחלה נקבל כי $a_0 = 3$, $a_1 = 12$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2} - (2n-6)a_{n-1}\right)x^n = x^2+2x+2$$

ע"י השוואת מקדמים נקבל

$2a_2 = 2 \Rightarrow a_2 = 1$ (מקדם חופשי)

$n=1$: $6a_3 + 4a_0 = 2 \Rightarrow a_3 = -\frac{5}{3}$ (מקדם של x)

$n=2$: $12a_4 + 2a_1 = 1 \Rightarrow a_4 = -\frac{23}{12}$ (מקדם של x^2)

$n=3$: $20a_5 = 0 \Rightarrow a_5 = 0$ (מקדם של x^3)

$\vdots$

לכן הפתרון נראה כך:

$$y = 3 + 12x + x^2 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{23}{12}x^4 + \dots + a_n x^n + \dots$$

כאשר

$$a_n = \frac{2n-10}{n(n-1)}a_{n-3} \quad (n \geq 5)$$

2. $y'' + xy = e^{x+1}$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

נקודה $x_0=0$ נקודה רגילה. לכן נחפש פתרון מהצורה

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ נגזור כמשוואה הנתונה:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = e\cdot e^x$$

פיתוח של e^x סביב $x=0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

כלומר

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

נבצע הזזת אינדקסים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

פיצול מופשט

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = e + e\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} + a_{n-1}\right)x^n = e\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

מתנאי ההתחלה נקבל $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.

מ... השוויון מתקיים אם: $a_2 = \frac{e}{2}$ (מקדם חופשי)

מהנוסחה שקיבלנו נוכל לחשב את המקדמים בצורה רקורסיבית:

$$a_{n+2} = \frac{\frac{e}{n!} - a_{n-1}}{(n+1)(n+2)} = \frac{e - n!\,a_{n-1}}{n!\,(n+1)(n+2)} \qquad (n \geq 2)$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{e - (n-2)!\,a_{n-3}}{(n-2)!\,(n-1)n} = \frac{e}{(n-2)!\,(n-1)n} - \frac{a_{n-3}}{(n-1)n}$$

כאשר $n \geq 3$. לכן הפתרון הוא:

$$y(x) = 1 + 2x + \frac{e}{2}x^2 + \frac{e-1}{6}x^3 + \frac{e-4}{24}x^4 + \cdots$$

שאלה 4 מועד א':

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

נציב במשוואה הנתונה:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} + (x-1) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+1) a_n \right) (x-1)^n \qquad (*)$$

(אין שינוי בשאלה כיוון שמתאפס הביטוי.)

מ-$(*)$ נקבל נוסחת נסיגה:

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}$$

כלומר

$$a_{2016} = -\frac{a_{2014}}{2016} \Rightarrow \frac{a_{2016}}{a_{2014}} = -\frac{1}{2016}$$

שאלה 3:

$y'' + 4xy' + Cy = 0$, $y(0) = a$, $y'(0) = 0$.

כאן $x_0 = 0$ נקודה רגילה.

נניח פתרון מהצורה $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ונציב במשוואה:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 4x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + C \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + C \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\overset{\text{הזזת אינדקס}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + 4 \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + C \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1) a_{n+2} + (4n + C) a_n \right) x^n = 0$$

נוסחת הנסיגה שמקבלים היא:

$$a_{n+2} = \frac{-(4n + C) a_n}{(n+1)(n+2)} \quad , \quad n \geq 0 .$$

ב. נמצא תנאי כללי על הגורם שלה- אפס הוא מקדם שוה.

נמצא תנאי כללי על הגורם:

מתנאי ההתחלה: $y(0)=a \Rightarrow a_0=a$.

$y'(0)=0 \Rightarrow a_1=0$

נמצא שאר המקדמים לפי נוסחת הנסיגה:

$a_2=-\frac{ca}{2}$, $a_3=0$, $a_4=-\frac{bc\cdot(c+8)}{24}$

$a_5=0$, ...

רק לגבי שהמקדמים בא"ז שוים לאפס.

נשאר המקדמים בצ"ט:

$$a_{2n}=-\frac{(4\cdot 2n+c)\,a_{2n-2}}{(2n+2)(1+n2)}=$$

כלומר בתנאי הכללי על הגורם הוא a_{2n}.

כדי שנקבל שפתרון כולנו הבתנאים צריך להתאפס
כולל מקדם שוה ל $\frac{1}{2}$ מספיק לדעת ש:

$$\boxed{a_8=0} \Leftarrow (4\cdot 2n+c)=0$$

לכל $n=0,1,2,\ldots$.