פתרון תרגילים

שאלה 1: נחשב W:

$$W = \begin{vmatrix} xe^x & x \\ xe^x + e^x & 1 \end{vmatrix} = xe^x - x(xe^x + e^x) = -x^2e^x$$

נקבע ש: $x = 0$. $W = 0$, לכן $y_1(x)$ ו $y_2(x)$ לא יכולים להיות פתרונות של מד"ר הומוגנית מסדר 2 בקטע $[-1, 1]$.
אבל בכל קטע שלא מכיל $x = 0$ y_1 ו y_2 מהווים פתרונות של מד"ר הומוגנית מסדר 2.

שאלה 2: נוסף על פונקציה y שניתן לינארי על פתרונות הקודמים $W = 0$.

$$\begin{vmatrix} x & e^x & y \\ 1 & e^x & y' \\ 0 & e^x & y'' \end{vmatrix} = x(e^x y'' - e^x y') - e^x y = 0$$

$$\Rightarrow e^x \neq 0 : \quad xe^x y'' - xe^x y' + e^x y = 0$$

$$y'' - y' + \frac{1}{x}y = 0$$

שאלה 3:

פתרון: בשאלה זאת מספיק שלא פונקציה e^{-x}, כיוון שניתן שפתרון מסדר 4 של המ"ס שמתאים לפתרונות הינו 4 פונקציות.

קשה לבדוק אם בת"ל כוונתכן, נבדוק ת"ל הבאה.

בניין לשבוע תהום בישר קן שהו $\sin x, \cos x, e^{-x}, e^{x}$

בת"ל.

נניח כי:

$$Ae^{x} + Be^{-x} + C\sin x + D\cos x = 0 \quad (*)$$

בניין לשבוע תהום $[a,b]$ שהו אם $(*)$ מתקיים

אז $A = B = C = D = 0$.

אם נבחר כתהום $[0, 2\pi]$ נניח כי:

$$Ae^{x} + Be^{-x} + C\sin x + D\cos x = 0$$

אז, כלשהו:

1) $x = 0$: $A + B + D = 0$

2) $x = \frac{\pi}{2}$: $Ae^{\frac{\pi}{2}} + \frac{B}{e^{\frac{\pi}{2}}} + C = 0$

3) $x = \pi$: $Ae^{\pi} + \frac{B}{e^{\pi}} - D = 0$

4) $x = 2\pi$: $Ae^{2\pi} + \frac{B}{e^{2\pi}} + D = 0$

(3)+(1) : $A(e^{\pi} + e^{2\pi}) + B(e^{-\pi} + e^{-2\pi}) = 0$

(3)+(1) : $A(e^{\pi} + 1) + B(e^{-\pi} + 1) = 0$

$$\begin{vmatrix} e^{\pi}+e^{2\pi} & e^{-\pi}+e^{-2\pi} \\ e^{\pi}+1 & e^{-\pi}+1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(e^{\pi}+e^{2\pi}\right)\left(e^{-\pi}+1\right) - \left(e^{-\pi}+e^{-2\pi}\right)\left(e^{\pi}+1\right) =$$

$$= 1 + e^{\pi} + e^{\pi} + e^{2\pi} - 1 - e^{-\pi} - e^{-\pi} - e^{-2\pi} =$$

$$= 2e^{\pi} + e^{2\pi} - 2e^{-\pi} - e^{-2\pi} \neq 0$$

$$\Leftarrow \quad A = B = 0$$

מהשוויון (1) נובע כי $D = 0$.

מהשוויון (2) נובע כי $C = 0$.

$$\Leftarrow \quad A = B = C = D = 0$$

$\Leftarrow$ המערכת היא הומוגנית כנדרש.

שאלה 4:

א.

$$\bar{y}'(x) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \bar{y}(x)$$

$$= A$$

נמצא ע"ע:

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(6-\lambda) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0 \Rightarrow (\lambda-7)(\lambda-3) = 0 \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 7 \end{cases}$$

נמצא וקט"ע המתאים לכל ע"ע.

$\lambda_1 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = -\beta$$

נבחר $\alpha = 1 \Rightarrow \beta = -1$ ולכן $\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 7$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -3\alpha + \beta = 0$$

$$3\alpha - \beta = 0 \Rightarrow 3\alpha = \beta$$

נבחר $\beta = 3$ ולכן $\alpha = 1$ ו $\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

הפתרון:

$$\bar{y}(x) = c_1 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{7x} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

מצורה מפורשת:

$$y_1(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{7x} \quad ; \quad y_2(x) = -c_1 e^{3x} + 3c_2 e^{7x}$$

ב.

$$\bar{y}'(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18x \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A =$

נפתור מערכת הומוגנית:

$$\bar{y}'(x) = A\bar{y}(x)$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 6) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3$$

נמצא ו"ע מתאים עבור כל ע.ע:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta = 4\gamma$$

$$3\gamma = -3\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = -\gamma$$

נבחר $\gamma = 1$ ולכן $\alpha = -1$, $\beta = 4$:

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = -\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \gamma$$
$$\alpha = -\gamma$$

נבחר $\alpha = 1$ אז $\beta = \gamma = -1$

$$\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_3 = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \gamma \quad , \quad \beta = 2\gamma$$

נבחר $\gamma = 1$ אז $\beta = 2$, ולכן $\alpha = 1$

$$\vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

אז, הפתרון המלא שלנו:

$$\vec{y}(x) = c_1 e^{x} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נחפש פתרון פרטי, מהצורה:

$$\vec{y}_p(x) = U(x)\, \vec{C}(x)$$

$$\begin{pmatrix} -e^x & e^{-2x} & e^{3x} \\ 4e^x & -e^{-2x} & 2e^{3x} \\ e^x & -e^{-2x} & e^{3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \\ c_3(x) \end{pmatrix} = \vec{y}_p(x)$$

נמצא $c_1(x), c_2(x), c_3(x)$ כך ש:

$$\begin{pmatrix} -e^x & e^{-2x} & e^{3x} \\ 4e^x & -e^{-2x} & 2e^{3x} \\ e^x & -e^{-2x} & e^{3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ c_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18x \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) $-c_1' e^x + c_2' e^{-2x} + c_3' e^{3x} = 18x$

2) $4c_1' e^x - c_2' e^{-2x} + 2c_3' e^{3x} = 3$

3) $c_1' e^x - c_2' e^{-2x} + c_3' e^{3x} = 0$

נחסר (1) מ (2): (2)-(1):

4*) $3c_1' e^x + 3c_3' e^{3x} = 18x + 3$

נחסר (3) מ (2): (2)-(3):

2*) $3c_1' e^x + c_3' e^{3x} = 3$

משתמש נקבל את ה:

$$2c_3' e^{3x} = 18x \Rightarrow c_3' = 9x e^{-3x}$$

ע"י אינטגרציה בחלקים נקבל

$$c_3(x) = -3x e^{-3x} - e^{-3x} = e^{-3x}(-1-3x) \Rightarrow$$

נציב C_3' במש' (1) שקבלנו

$$3C_1'e^x + 3(9xe^{-3x})e^{3x} = 18x+3$$

$$3C_1'e^x = -9x+3 \Rightarrow C_1' = -3xe^{-x}+e^{-x}$$

$$C_1' = e^{-x}(-3x+1)$$

ע"י אינטגרציה בחלקים נקבל:

$$\Rightarrow C_1(x) = e^{-x}(3x+2)$$

נציב C_1' ו C_3' בכולם המשוואות (1), (2), (3) ונקבל

C_2'. למשל עבור מש' (3):

$$e^{-x}(-3x+1)e^x - C_2'e^{-2x} + 9xe^{-3x}e^{3x} = 0$$

$$(-3x+1) - C_2'e^{-2x} + 9x = 0$$

$$C_2' = 6xe^{2x} + e^{2x} = e^{2x}(6x+1)$$

ע"י אינטגרציה בחלקים נקבל

$$\Rightarrow C_2(x) = e^{2x}(3x-1)$$

$$\vec{y}_p(x) = \begin{pmatrix} -e^x & e^{-2x} & e^{3x} \\ 4e^x & -e^{-2x} & 2e^{3x} \\ e^x & -e^{-2x} & e^{3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-x}(3x+2) \\ e^{2x}(3x-1) \\ e^{-3x}(-3x-1) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{y}_p(x) = \begin{pmatrix} -3x-4 \\ 3x+7 \\ -3x+2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}(x) = c_1 e^{x}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 e^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -3x-4 \\ 3x+7 \\ -3x+2 \end{pmatrix}$$

ג. נכתוב את המערכת בצורה הבאה:

$$\vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}(x)$$

נוכל לראות שהפתרון הכללי של המערכת
הוא:

$$\vec{y}(x) = c_1 e^{x}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 e^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 5:

$$\bar{y}'(x) = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix} \bar{y}(x)$$

נמצא ע"ע:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 2 \\ 2 & \alpha-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\alpha-\lambda)^2 - 4 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 - 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\alpha \pm \sqrt{(2\alpha)^2 - 4(\alpha^2-4)}}{2} = \frac{2\alpha \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2\alpha \pm 4}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \alpha+2 \quad , \quad \lambda_2 = \alpha-2$$

לכן כפתרון של המערכת הוא מהצורה:

$$\bar{y}(x) = c_1 \vec{V}_1 e^{(\alpha+2)x} + c_2 \vec{V}_2 e^{(\alpha-2)x}$$

כאשר $\vec{V}_1$ ו$\vec{V}_2$ וקטורי עצמיים מתאימים לλ_1 וλ_2.

כדי ש$\bar{y}(x)$ יהיה חסום ב$(0,\infty)$ צריך שיתקיים ש-

$\alpha-2 \leq 0$ ו$\alpha+2 \leq 0$ $\Leftarrow$ $\alpha \leq -2$ ו$\alpha \leq 2$:

$\boxed{\alpha \leq -2}$.

שאלה 9:

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{y} = A\vec{y}$$

פתרון:

א. נמצא ע"ע:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= (2-\lambda)(-\lambda(2-\lambda)+1) - (-2(2-\lambda)+2) + (2-\lambda)$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 1$$

פולינום קיבלנו $\lambda=1$ מרובה אלגברית 2.

נמצא ו"ע מתאים לפ"ע:

$\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) $\alpha+\beta+\gamma = 0$
2) $-2\alpha-\beta-\gamma = 0$
3) $2\alpha+\beta+\gamma = 0$

$\xrightarrow{(1)+(2)} \alpha = 0$

$\xrightarrow{(1)+(3)} \beta = -\gamma$

נבחר $\gamma = 1$ ולכן $\beta = -1$.

$$\vec{N}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כיוון ש- $\lambda_1 = 1$ הינו ע"ע בעל ריבוי 2, נשאלת שאלה לגבי ע"ע מתאים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$
$$-2\alpha - \beta - \gamma = -1 \quad \xrightarrow{\text{סכום (2)}} \quad -\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 1$$
$$2\alpha + \beta + \gamma = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = -\gamma$$

נבחר $\gamma = 0$ ונקבל $\beta = 0$

$$\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

עבור $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta + \gamma = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = -\gamma}$$
$$-2\alpha - 2\beta - \gamma = 0 \Rightarrow -2\alpha + \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 2\alpha$$
$$2\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -2\alpha$$

נבחר $\alpha = 1$ ונקבל $\beta = -2$, $\gamma = 2$

$$\vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

מכפלת ג'ורדן בסעיף ב':

$$J=\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}} & & 0\\ & & 0\\ 0 & 0 & \boxed{2}\end{pmatrix}$$

$$A=PJP^{-1}$$

ב.

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 3 & -2\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$e^{Ax}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 3 & -2\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^x & xe^x & 0\\ 0 & e^x & 0\\ 0 & 0 & e^{2x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & e^x & e^{2x}\\ e^x & -xe^x+3e^x & -2e^{2x}\\ e^x & xe^x & 2e^{2x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}e^{2x} & \frac{1}{3}(e^x-e^{2x}) & \frac{1}{3}(e^x-e^{2x})\\ -2e^x-2e^{2x} & \frac{1}{3}(2e^{2x}-xe^x+5e^x) & \frac{1}{3}(2e^{2x}+8e^x-xe^x)\\ -2e^x+2e^{2x} & \frac{1}{3}(e^x+xe^x-2e^{2x}) & \frac{1}{3}(5e^x+xe^x-2e^{2x})\end{pmatrix}$$

סה"כ 2 נקודות

2. פתרון כללי למערכת: $\vec{z} = c\, e^{Ax}\vec{c}$

3.

$$\vec{y}(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\vec{y}(x) = e^{Ax}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ -2e^{x} - 2e^{2x} \\ -2e^{x} + 2e^{2x} - \end{pmatrix}$$

אחרון

$$\vec{y}(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}(x) = e^{Ax}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(e^{x} - e^{2x}) \\ \frac{1}{3}(2e^{2x} - xe^{x} + 5e^{x}) \end{pmatrix}$$

אחרון

$$\vec{y}(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}(x) = e^{Ax}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(e^{x} - e^{2x}) \\ \frac{1}{3}(2e^{2x} + 3e^{x} - xe^{x}) \\ \frac{1}{3}(-2e^{2x} - xe^{x} + 5e^{x}) \end{pmatrix}$$

④ יתן ל"ש טענות מושגים. (ש"מ לכ).