פתרון תרגיל 9

$$y''+4y'+4y=\frac{e^{-2x}}{x^2}$$

א.

נמצא פתרון למשוואה ההומוגנית:

$$y''+4y'+4y=0 \Rightarrow k^2+4k+4=0 \Rightarrow (k+2)^2=0$$

$$\Rightarrow k=-2 \quad \text{(מרובה 2)}$$

לכן

$$y_h=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}$$

פתרון נמצא פתרון בדרך של:

$$y_p=c_1(x)e^{-2x}+c_2(x)xe^{-2x}$$

כאשר:

$$\begin{cases} c_1'e^{-2x}+c_2'xe^{-2x}=0 \\ -2c_1'e^{-2x}+c_2'(e^{-2x}-2xe^{-2x})=\frac{e^{-2x}}{x^2} \end{cases}$$

לפי כלל קרמר:

$$\Delta=\begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x}-2xe^{-2x} \end{vmatrix}=e^{-4x}$$

$$c_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^{-2x} \\ \frac{e^{-2x}}{x^2} & e^{-2x}-2xe^{-2x} \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-\frac{e^{-4x}}{x}}{e^{-4x}}=-\frac{1}{x}$$

$$c_1(x)=-\ln|x|$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ 2e^{-2x} & e^{-2x} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{1}{x^2}$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{x}$$

$$y_p = -\ln|x|e^{-2x} - \frac{1}{x}\cdot xe^{-2x} = -\ln|x|e^{-2x} - e^{-2x}$$

:'st

$$y(x) = y_h + y_p$$

$$y(x) = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} - \ln|x|e^{-2x} - e^{-2x}$$

נציב תנאי, נקבל:

$$y(1) = 0 : \quad C_1e^{-2} + C_2e^{-2} - \ln|1|e^{-2} - e^{-2} = 0$$

$$C_1e^{-2} + C_2e^{-2} = e^{-2} \Rightarrow \boxed{C_1 + C_2 = 1} \quad (6א)$$

$$y'(x) = -2C_1e^{-2x} + C_2e^{-2x} - 2C_2xe^{-2x} - \frac{e^{-2x}}{x} + 2e^{-2x}\ln|x| + 2e^{-2x}$$

$$y'(1) = e^{-2} : \quad -2C_1e^{-2} + C_2e^{-2} - 2C_2e^{-2} - e^{-2} + 2e^{-2}\ln|1| + 2e^{-2} = e^{-2}$$

$$2C_1e^{-2} - e^{-2}C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{C_2}{2}} \quad (6)$$

נציב (6א) ב (6) נקבל:

$$\frac{C_2}{2} + C_2 = 1 \Rightarrow \frac{3}{2}C_2 = 1 \Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{1}{3}}$$

2. $y''' - y' = x$

נמצא פתרון של המשוואה ההומוגנית

$y''' - y' = 0 \Rightarrow k^3 - k = 0 \Rightarrow k(k^2-1) = 0$

$\Rightarrow k_1 = 0,\ k_2 = 1,\ k_3 = -1$

לכן

$$y_h = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$$

נמצא פתרון פרטי,

$$y_p = c_1(x) + c_2(x)e^x + c_3(x)e^{-x}$$

כאשר:

$$\begin{cases} c_1' + c_2' e^x + c_3' e^{-x} = 0 \\ c_1' \cdot 0 + c_2' e^x - c_3' e^{-x} = 0 \\ c_1' \cdot 0 + c_2' e^x + c_3' e^{-x} = x \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix} \overset{\text{פיתוח לפי שורה 1}}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} e^x & -e^{-x} \\ e^x & e^{-x} \end{vmatrix} + 0 + 0$$

$$= e^x \cdot e^{-x} + e^{-x} \cdot e^x = 2$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ x & e^x & e^{-x} \end{vmatrix}}{\Delta} \overset{\text{פיתוח לפי שורה 1}}{=} \frac{0 + 0 + (-1)^{1+3} \cdot x \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}}{2} =$$

$$= \frac{x}{2}(-2) = -x$$

$$C_1(x) = -\frac{x^2}{2}$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{-x} \\ 0 & 0 & -e^{-x} \\ 0 & x & e^{-x} \end{vmatrix}}{\Delta} \overset{\text{לפי שורה 1}}{=} \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -e^{-x} \\ x & e^{-x} \end{vmatrix} + 0 + 0}{2}$$

$$= \frac{xe^{-x}}{2}$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}(x-1)e^{-x}$$

$$C_3'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & x \end{vmatrix}}{\Delta} \overset{\text{לפי שורה 1}}{=} \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & x \end{vmatrix} + 0 + 0}{2}$$

$$= \frac{xe^x}{2}$$

$$C_3(x) = \frac{1}{2}(x-1)e^x$$

$$y_p = -\frac{x^2}{2} + -\frac{1}{2}(x-1)e^{-x} \cdot e^x + \frac{1}{2}(x-1)e^x \cdot e^{-x} =$$

$$= -\frac{x^2}{2}$$

$$y(x) = y_h + y_p = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} - \frac{x^2}{2}$$

3. כמשוואה הומוגנית:

$$x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^7$$

נחלק ב x^3:

$$y''' + \frac{y''}{x} - \frac{2}{x^2}y' + \frac{2}{x^3}y = 2x^4$$

לפי הנוסחה

$$y_h = c_1x + c_2x^2 + c_3x^{-1}$$

נעבור לפתרון הכללי:

$$y_p = c_1(x)x + c_2(x)x^2 + c_3(x)x^{-1}$$

כשאלכת:

$$\begin{cases} c_1'x + c_2'x^2 + c_3'x^{-1} = 0 \\ c_1' \cdot 1 + c_2' \cdot 2x + c_3' \cdot \frac{1}{x^2} = 0 \\ c_1' \cdot 0 + c_2' \cdot 2 + 2c_3' \cdot \frac{1}{x^3} = 2x^4 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^{-1} \\ 1 & 2x & -\frac{1}{x^2} \\ 0 & 2 & \frac{2}{x^3} \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{שורה } 1]{(-1)^{1+1} \cdot x} \begin{vmatrix} 2x & -\frac{1}{x^2} \\ 2 & \frac{2}{x^3} \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} x^2 & x^{-1} \\ 2 & \frac{2}{x^3} \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} x^2 & x^{-1} \\ 2x & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{6}{x}$$

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^2 & \frac{1}{x} \\ 0 & 2x & -\frac{1}{x^2} \\ 2x^4 & 2 & \frac{1}{x^3} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2x^4(-3)}{\frac{6}{x}} = -x^5$$

$$C_1(x) = -\frac{x^6}{6}$$

$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 & \frac{1}{x} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{x^2} \\ 0 & 2x^4 & \frac{2}{x^3} \end{vmatrix}}{\Delta} \quad \text{כלל קרמר} \quad \frac{-2x^4\left(-\frac{2}{x}\right)}{\frac{6}{x}} = \frac{2}{3}x^4$$

$$C_2(x) = \frac{2}{15}x^5$$

$$C_3' = \frac{\begin{vmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2 & 2x^4 \end{vmatrix}}{\Delta} \quad \text{כלל קרמר} \quad \frac{2x^4\left(2x^2 - x^2\right)}{\frac{6}{x}} = \frac{x^7}{3}$$

$$C_3(x) = \frac{x^8}{24}$$

$$y_p = -\frac{x^6}{6}\cdot x + \frac{2}{15}x^5 \cdot x^2 + \frac{x^8}{24}\cdot x^{-1} = \frac{1}{120}x^7$$

$$y(x) = y_h + y_p$$

$$y(x) = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^{-1} + \frac{1}{120}x^7$$

4. $y''' + y' = \tan x$

נמצא פתרון של המשוואה ההומוגנית:

$$y''' + y' = 0 \Rightarrow k^3 + k = 0 \Rightarrow k(k^2+1) = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = 0, \quad k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k^2 = -1 \Rightarrow$$

$$k = \cos\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2}\right) \quad n = 0, 1$$

$n=0$: $k = i$, $n=1$: $k = -i$

לכן

$$y_h = C_1 + C_2\cos x + C_3 \sin x$$

נחפש פתרון פרטי מהצורה:

$$y_p = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x$$

<u>נרשום במערכת:</u>

1) $C_1' + C_2'\cos x + C_3' \sin x = 0$

2) $C_1' \cdot 0 + C_2' \sin x + C_3' \cos x = 0$

3) $C_1' \cdot 0 - C_2' \cos x - C_3' \sin x = \tan x$

<u>לפי קרמר:</u>

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} \overset{\text{לפי שורה}}{=} 1 \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x) = 1$$

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \tan x & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}}{\Delta} \quad \text{פיתוח לפי שורה 1} \quad = (-1)^{3+1} \tan x \underbrace{\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)}_{0+0} + \underbrace{\quad}_{1}$$

$$= \tan x = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^{-1}$$

$$C_1(x) = -\ln|\cos x|$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \tan x & -\sin x \end{vmatrix}}{\Delta} \quad \text{פיתוח לפי שורה 1} \quad = \frac{-\cos x \tan x}{1} = -\cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= -\sin x \quad \Rightarrow \quad C_2(x) = \cos x$$

$$C_3'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \tan x \end{vmatrix}}{\Delta} \quad \text{פיתוח לפי שורה 1} \quad = \frac{-\sin x \cdot \tan x}{1} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

$$C_3(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan \frac{x}{2}} \right| + \sin x$$

$$y_p = -\ln|\cos x| + \cos x \cdot \cos x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan \frac{x}{2}} \right| + \sin x \cdot \sin x$$

$$= \ln|\sin x| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan \frac{x}{2}} \right| = \ln \left| \frac{1 - \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan \frac{x}{2}} \cdot \sin x \right|$$

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sin x + \ln \left| \frac{1 - \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan \frac{x}{2}} \cdot \sin x \right|$$

שאלה 2:

1. $2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$

נעבור לפתרון של המשוואה ההומוגנית:

$2y'' - 4y' - 6y = 0 \Rightarrow 2k^2 - 4k - 6 = 0 \Rightarrow k^2 - 2k - 3 = 0$

$\Rightarrow k_1 = 3, \; k_2 = -1$

$y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$

נמצא פתרון פרטי, שהוא הצורה:

$y_p = Ae^{2x} \Rightarrow y_p' = 2Ae^{2x} \quad y_p'' = 4Ae^{2x}$

נציב במשוואה המקורית:

$4Ae^{2x} - 8Ae^{2x} - 6Ae^{2x} = 3e^{2x} \Rightarrow -6A = 3$

$A = -\frac{1}{2}$

לכן $y_p = -\frac{1}{2}e^{2x}$

$\Rightarrow y(x) = y_h + y_p = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2}e^{2x}$

2. $y''' + 4y' = x$

נעבור לפתרון של המשוואה ההומוגנית:

$y''' + 4y' = 0 \Rightarrow k^3 + 4k = 0 \Rightarrow k(k^2 + 4) = 0$

$\Rightarrow k_1 = 0,$

$k^2 + 4 = 0$

$$k^2+4=0$$

$$k=\sqrt[2]{4}\left(\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{2}\right)\right) \quad n=0,1$$

$$n=0\Rightarrow k=2i \quad , n=1\Rightarrow k=-2i$$

לכן

$$y_h=C_1+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$$

נחפש פתרון פרטי שמקיים:

$$y_p=(Ax+B)$$

$$y_p'=A \quad , y_p''=0 \quad , y_p'''=0$$

נציב במשוואה המקורית ונקבל $4A=x$ ⇐ נוכל
לדרוש מהשוואה כזו לכן:
שנכפול $(Ax+B)$ ב x : $y_p=Ax^2+Bx$.

$$y_p'=2Ax+B \quad , y_p''=2A \quad y_p'''=0$$

נציב במשוואה המקורית:

$$0+4(2Ax+B)=x \Rightarrow 8A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{8}$$
$$B=0$$

לכן

$$y_p=\frac{1}{8}x^2$$

$$\Rightarrow y(x)=y_h+y_p=C_1+C_2\cos 2x+C_3\sin x+\frac{1}{8}x^2$$

נציב תנאי התחלה:

$$y(0)=y'(0)=0$$
$$y''(0)=1$$

$$y(0)=0 \therefore C_1+C_2=0 \Rightarrow C_1=-C_2$$

$$y'(x)=-2C_2\sin 2x+C_3\cos x+\frac{1}{4}x$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$y''(x) = -4C_2 \cos 2x - C_3 \sin x + \frac{1}{4}$$

$$y''(0) = 1 : \quad -4C_2 + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow C_2 = -\frac{3}{16}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{3}{16}$$

$$y(x) = \frac{3}{16} - \frac{3}{16}\cos 2x + \frac{1}{8}x^2$$

3. $$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = -28e^{2x}$$

נמצא פתרון של המשוואה ההומוגנית:

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = 0$$

$$\Rightarrow k^4 + 3k^3 - 15k^2 - 19k + 30 = 0$$

$$\Rightarrow (k-1)(k-3)(k^2+7k+10) = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = 1, \quad k_2 = 3, \quad k_3 = -5, \quad k_4 = -2$$

לכן $$y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-5x} + C_4 e^{-2x}$$

נחפש פתרון פרט' מהצורה: $$y_p = Ae^{2x}$$

$$y_p' = 2Ae^{2x} \quad y_p'' = 4Ae^{2x} \quad y_p''' = 8Ae^{2x} \quad y_p^{(4)} = 16Ae^{2x}$$

נציב במשוואה המקורית:

$$16Ae^{2x} + 24Ae^{2x} - 60Ae^{2x} - 38Ae^{2x} + 30Ae^{2x} = -28e^{2x}$$

$$-28Ae^{2x} = -28e^{2x}$$

$$\boxed{A=1}$$

$$\boxed{y_p = e^{2x}}$$

פתרון כללי:

$$y = c_1e^{x} + c_2e^{3x} + c_3e^{-5x} + c_4e^{-2x} + e^{2x}$$

4.

$$y''' - 4y' = x + 3\cos x + e^{-2x}$$

נמצא פתרון למשוואה ההומוגנית:

$$y''' - 4y' = 0 \Rightarrow k^3 - 4k = 0 \Rightarrow k(k^2-4)$$

$$k_1 = 0,\ k_2 = 2,\ k_3 = -2$$

לכן

$$y_h = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x}$$

נחפש פתרון פרט' מהצורה:

$$y_p = (Ax+B)x + C\cos x + D\sin x + Fxe^{-2x}$$

כדי למצוא פתרון פרטי למשוואה נציב את הפתרון הזה במשוואה ההומוגנית

נציב ונגזור במשוואה המקורית, ונקבל כי:

$$A = -\frac{1}{8},\ B = 0,\ C = 0,\ D = -\frac{3}{5},\ F = \frac{1}{8}$$

אז,

$$y_p = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{5}\sin x + \frac{1}{8}xe^{-2x}$$

ולכן

$$y = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x} - \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{5}\sin x + \frac{1}{8}xe^{-2x}$$

שאלה 3:

לפי המידע הנתון ניתן לרשום שיש שורש אחד מריבוי 3 והוא האפס, ויש שורש מורכב $2i+1$ ומצמוד.

1. לכן המשוואה האופיינית היא:

$$(k-0)^3(k-(1+2i))(k-(1-2i))=0$$

$$k^3(k+1+2i)(k+1-2i)=0$$

$$k^3(k^2+2k+5)=0 \Rightarrow k^5+2k^4+5k^3=0$$

לכן משוואת ההפרשים (לפי הנתון צורה משוואת דיפרנציאלית עם מקדמים קבועים):

$$y^{(5)}+2y^{(4)}+5y^{(3)}=0$$

שאלה 4:

נתון כי $\Delta=0$ (דיסקרימיננטה) לכן k שורש מריבוי 2,

ולכן הפתרון הכללי למשוואה הדיפרנציאלית ההומוגנית:

$$y_h(x)=c_1e^{kx}+c_2xe^{kx}$$

$$y(0)=1 \Leftarrow$$

$$c_1e^{k\cdot 0}+c_2\cdot 0\cdot e^{0\cdot k}=1 \Rightarrow \boxed{c_1=1}$$

$$y'(x)=c_1ke^{kx}+c_2e^{kx}+kc_2xe^{kx}$$

$$y'(0)=1 \Leftarrow$$

$$k+c_2=1 \Rightarrow \boxed{c_2=1-k}$$

$$y_h(x) = e^{kx}(1-k)xe^{kx} = e^{kx}(1+(1-k)x)$$

* (הערה: שאלה זו מופיעה גם בתרגיל הקודם של תלת"מ)

שאלה 5:

$$y''' + y'' - y' + y = e^{-x}$$

נמצא פתרון למש' הומוגנית:

$$y''' + y'' - y' + y = 0$$

$$\Rightarrow k^3 + k^2 - k - 1 = 0 \Rightarrow (k+1)(k^2-1) = 0$$

$$k_1 = -1 \quad , \quad k_2 = 1 \quad , \quad k_3 = -1$$

קיבלנו (-1) מרובה (2) ו (1) מרובה (1) לכן:

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x}$$

נחפש פתרון פרטי מהצורה $y_p = Ax^2 e^{-x}$, (כי -1 מרובה פעמיים בפתרון להומוגנית)

$$\Rightarrow$$

$$y_p' = e^{-x}(2Ax - Ax^2)$$

$$y_p'' = e^{-x}(2A + Ax^2 - 4Ax)$$

$$y_p''' = e^{-x}(6Ax - 6A - Ax^2)$$

נציב במשוואה המקורית ונקבל

$$-4Ae^{-x} = -e^{-x} \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$y_p = \frac{1}{4}x^2 e^{-x}$$

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + \frac{1}{4}x^2 e^{-x}$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = -c_2}$$

$$y'(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + c_3 e^{-x} - c_3 x e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{1}{4}x^2 e^{-x}$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow c_1 - c_2 + c_3 = 0 \Rightarrow -2c_2 + c_3 = 0$$

$$\boxed{c_3 = 2c_2}$$

$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ כדי שזה יתכנס

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + \frac{1}{4}x^2 e^{-x}$$

$$= c_1 \lim_{x\to\infty} e^x + c_2 \lim_{x\to\infty} e^{-x} + c_3 \lim_{x\to\infty} x e^{-x} + \frac{1}{4}\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$$

$$= c_1 \lim_{x\to\infty} e^x + 0 + 0 + 0 = 0$$ כדי שזה יתכנס

$c_1 = 0$ ולכן $c_3 = c_2 = 0$ ומכאן

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{4}x^2 e^{-x}}$$

נמצא את ה"ת.

כלומר צריך לחשב את $y''(0) = \frac{1}{2}$.

$$y'(x) = \frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{1}{4}x^2 e^{-x}$$

$$y''(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{4}x^2 - x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y''(0) = \frac{1}{2}$$