פתרון תרגיל 5

שאלה 1: נבדוק אם הפונקציות מקיימות תנאי ליפשיץ לפי הגדרה או לפי משפט הגזירות לפי y:

1. $|x\sin y_1 - x\sin y_2| = |(x\sin y_2 - 1 + x\cos x) - x\sin y_1 - 1 + x\cos x|$

$= |\sin x\,(y_2 - y_1)| = |\sin x|\,|y_2 - y_1| \leq 1 \cdot |y_2 - y_1|$

הפונקציה מקיימת תנאי ליפשיץ עם $K = 1$ בשפה כולה.

נבדוק עם לפי משפט על $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = |\sin x| < 1$$

ומשם.

2. $|y_2 - y_1| \cdot \frac{5}{1} \geq |y_2 - y_1| \left|\frac{1}{1+x^2}\right| = \left|\left(\frac{1}{2}x + y_2\right) - \left(\frac{1}{2}x + y_1\right)\right|$

בשפה כולה

לכן f מקיימת תנאי ליפשיץ בשפה כולה עם: $K = \frac{1}{5}$.

בשפה $(3,5) \times (0,2)$

3. נבדוק לפי משפט על כשגזרת לפי x:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = \left|\frac{2}{5}(2-y)^{\frac{2}{5}-1}\right| = \frac{2}{5} \cdot \left|\frac{1}{(2-y)^{\frac{3}{5}}}\right|$$

כמובן כיוון אכ"ל נקודות על הישר $y=2$!

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \frac{2}{5}\left|\frac{1}{(2-y)^{\frac{3}{5}}}\right| \xrightarrow[y\to 2]{} \infty$$

לכן תנ"ו לפש"ל לא מתקיים.

שאלה 2:

1. לא נכון.

$f(x,y) = y' = e^{x^2} - y^2$ פתרון למשוואה $y=1$.

$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$! $f(x,y)$ רציפות בכל המישור, לפי משפט הקיום והיחידות קיים פתרון יחיד למשוואה עם תנאי התחלה אבל הפתרון המקיים $y(0) > 1$! $y(3) < 1$ חייב לעבור דרך כל הנקודות $(1,x)$ שבהן $3 > x > 0$, וזו נקודת. שכל פתרונות שווים שנפגשים בנקודה $(1,x)$ בסתירה למשפט הקיום והיחידות.

2. $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y^3+x} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y^3+x}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + y^2 \Rightarrow x' = \frac{x}{y} + y^2$$

מלק ב y:

x כפונק' של y $\boxed{\quad}$ $y = \left(\frac{x}{y}\right)' \Leftarrow$ שני הצדדים $y \neq 0$ $\frac{x'}{y} - \frac{x}{y^2}$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y^2}{2} + C \Rightarrow \boxed{x = \frac{y^3}{2} + Cy}$$

עבור $y(1) = 1$:

$$1 = \frac{1}{2} + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2}$$

לכן

$$\frac{1}{2}y + \frac{y^3}{2} = x$$

נבדוק אם הפתרון עובר דרך $(2,5)$:

נציב $(2,5)$ בפתרון שקיבלנו ונראה אם נקבל שוויון:

$$5 = 1 + \frac{8}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{5^3}{2} \stackrel{?}{=} 5$$

קיבלנו שוויון ולכן הפתרון עובר דרך הנק' $(2,5)$.

3. נתון:

$$\left((9-y^2)\cos y\right)dx + \left(y^2+6y+10\right)dy = 0$$

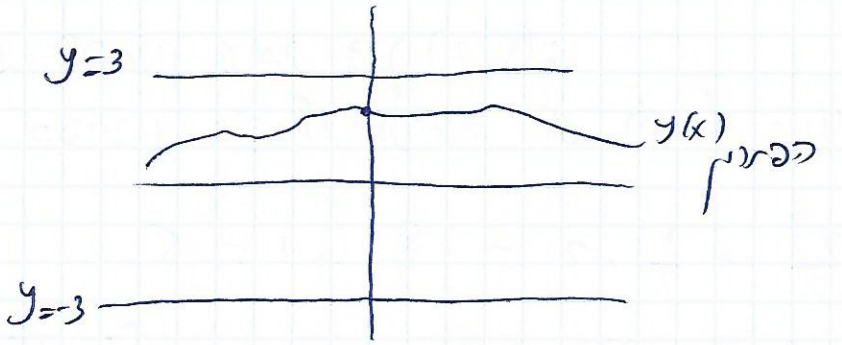
$$\Rightarrow \quad y' = \frac{(y^2-9)\cos y}{y^2+6y+10} = f(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\left((9+2y)\cdot\left((\cos y)(9-y^2)\right)\right) - (y^2+6y+10)(\sin y(9-y^2) + \cos y(2y))}{(y^2+6y+10)^2} \leftarrow \text{המכנה לא מתאפס.}$$

$f(x,y)$ ו- $\frac{\partial f}{\partial y}$ מוגדרות בכל המישור, לכן לפי משפט קיום ויחידות קי"מ פתרון יחיד בכל המישור, ובפרט עובר תמיד ההתלה נתון $y(0)=2$.

$y=\pm 3$ פותרים את המשוואה (תבדקו), אז הפתרון

שאנו בקן $(2,0)$ לא חותך את הישרים $y=\pm 3$
אחרת נקבע סתירה למשפט הקיום והיחידות, ולכן
הפתרון חסום ע"י שני הישרים הללו.



שאלה 3:

1. $y''' - 2y'' - 3y' = 0$

נחפש פתרון מהצורה $y = e^{kx}$.

$y' = ke^{kx}$ $y'' = k^2e^{kx}$, $y''' = k^3e^{kx}$

נציב במשוואה:

$$k^3e^{kx} - 2k^2e^{kx} - 3ke^{kx} = 0$$

נחלק ב e^{kx}:

$$k^3 - 2k^2 - 3k = 0 \Rightarrow k(k^2 - 2k - 3) = 0$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 3, \quad k_3 = -1$$

על הפתרון הכללי:

$$y = c_1e^{0x} + c_2e^{3x} + c_3e^{-x} = c_1 + c_2e^{3x} + c_3e^{-x}$$

2.

$$y^{(4)} + y = 0$$

משוואה אופיינית: $k^4 + 1 = 0$

$$k^4 + 1 = 0 \Rightarrow k^4 = -1 \Rightarrow k^4 = \cos(\pi + 2\pi n) + i\sin(\pi + 2\pi n)$$

$$\Rightarrow k = \cos\left(\frac{\pi + 2\pi n}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2\pi n}{4}\right) \qquad n = 0, 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad k_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad k_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

הפתרון:

$$y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C_1\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + C_2\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C_3\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + C_4\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\right)$$

3.

משוואה אופיינית: $k^3 - k^2 + k - 1 = 0$

$$(k-1)(k^2+1) = 0 \Rightarrow k_1 = 1$$

$$k_2 = i$$

$$k_3 = -i$$

הפתרון: $y = C_1 e^x + C_2\cos(x) + C_3\sin(x)$

נגזור את הפתרון:

$$y' = C_1 e^x - C_2\sin x + C_3\cos x$$

$$y'' = C_1 e^x - C_2\cos x - C_3\sin x$$

עכשיו נציב: $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$, $y'(0) = -1$ ונקבל

1) $C_1 + C_2 = 3 \Rightarrow C_1 = 3 - C_2 \Rightarrow \boxed{C_1 = 1}$

2) $C_1 + C_3 = 4 \Rightarrow \boxed{C_3 = 3}$

3) $C_1 - C_2 = -1 \Rightarrow 3 - C_2 - C_2 = -1 \Rightarrow \boxed{C_2 = 2}$

$$y(x) = e^x + 2\cos x + 3\sin x$$

שאלה 4:

א. $y' = x(1-y)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x(1-y)^{\frac{1}{4}}$

$\Leftarrow \int \frac{dy}{(1-y)^{\frac{1}{4}}} = \int x\,dx \Leftarrow -5(1-y)^{\frac{1}{5}} = \frac{x^2}{2} + C$

$1-y \neq 0$

נציב $y(0)=1 \Rightarrow$ נקבל $C=0$

$-5(1-y)^{\frac{1}{5}} = \frac{x^2}{2} \Leftarrow (1-y)^{\frac{1}{5}} = -\frac{x^2}{10} \Leftarrow y = 1 - (-\frac{x^2}{10})^5$

נבדוק $y=1$:

$y=1$ פתרון כי $0 \stackrel{?}{=} x(1-1)^{\frac{1}{4}}$ מתקיים

נבדוק את $y = 1 - (-\frac{x^2}{10})^5$ ו $y=1$

ב. $f(x,y) = x(1-y)^{\frac{1}{4}}$ כפונ' סביב הנק' $(1,0)$. נבדוק $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{5}{4}x(1-y)^{-\frac{1}{4}} \xrightarrow{y \to 1} \infty$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ לא רציפה סביב הנק' $(1,0)$ ולכן

$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = \left|\frac{5}{4}\frac{(1-y)^{\frac{1}{4}}}{x}\right| \xrightarrow{y \to 1} \infty$

לכן משפט הפונ' הסתומות לא מתקיים, אין פתרון יחיד.

שאלה 5:

$$f(x,y) = y' = |y-3|^a \sin x$$

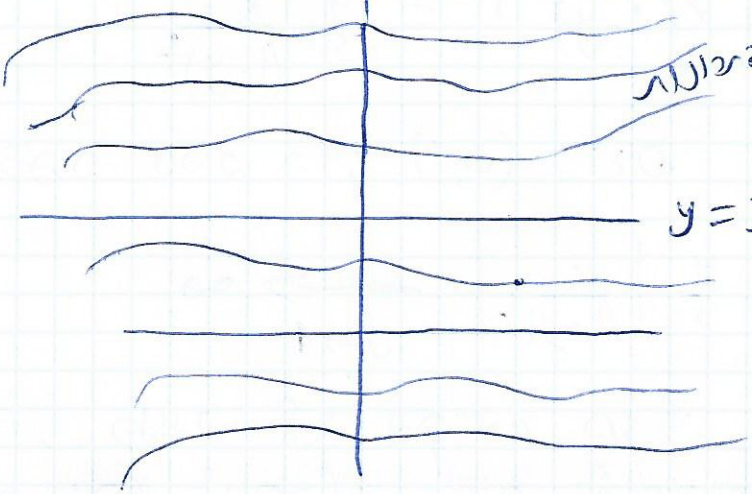
נגזור במשתנה y,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} a(y-3)^{a-1}\sin x & y>3 \\ -a(y-3)^{a-1}\sin x & y<3 \end{cases}$$

שהרי בכל (x_0, y_0) כאשר $y_0 \neq 3$ אפשר למצוא מלבן שבו $\frac{\partial f}{\partial y}$ רציפה ולכן נקבל בתוכו י"ג.

שימו לב כי $\frac{\partial f}{\partial y}$ לא מוגדרת בכל הנקודות $(x_0, 3)$ ולכן לא נוכל, בלי לבדוק כי הפתרונות הסודרים בנקודות (x_0, y_0) כאשר $y_0 \neq 3$ שמצויים מעל הישר $y=3$ או מתחת לישר $y=3$, ולכן שהרי בכל נק' שמצויה $(x_0, 3)$ ד"מ בתוך י"ג שמ"ד שלובד דוכה ורוצ) הישר $y=3$.

(*) את הפתרונות נוסיף למצוא ע"י הדרך שתוכל.



לכן לכל נק' (x_0, y_0) ד"מ בתוך י"ג קיים פתרון יחיד.