פתרון תרגיל 4

שאלה 1:

א. $xy''' - y'' = 0 \qquad y(1) = y'(1) = 1$

נגדיר $p(x) = y'' \Leftarrow y''' = p'(x)$ ונשים לב כי:

$$x p'(x) - p(x) = 0 \Rightarrow x\frac{dp}{dx} - p(x) = 0 \Rightarrow$$

$$x\frac{dp}{dx} = p(x) \xRightarrow{\text{נניח } p \neq 0} \int \frac{dp}{p(x)} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|p| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\Rightarrow p(x) = cx$$

$$\Rightarrow y'' = cx \Rightarrow y' = \frac{cx^2}{2} + c_0 \Rightarrow y = \frac{cx^3}{6} + c_0 x + c_1$$

נציב את התנאי ההתחלה בנגזרת הראשונה ובפונקציה:

$$y'(1) = 1 \Rightarrow \frac{c}{2} + c_0 = 1 \Rightarrow c_0 = 1 - \frac{c}{2}$$

$$y(1) = 1 \Rightarrow \frac{c}{6} + c_0 + c_1 = 1 \Rightarrow 1 = c_1 + \left(\frac{c}{2} - 1\right) + \frac{c}{6}$$

$$\Rightarrow c_1 - \frac{c}{3} = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{c}{3}$$

נבדוק $c = 3 \Leftarrow c_1 = 1 \qquad c_0 = -\frac{1}{2}$

לכן נקבל את הפתרון הבא:

$$y(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x + 1$$

(ב) אם $p = 0 \Rightarrow y = kx + b$ אז גם פתרון למשוואה המקורית שנקבל מפתרון כללי של המשוואה.

ג. $(4+x^2)y'' - 2xy' = 0$, $y(0)=y'(0)=0$

נגיד $y' = p(x)$ $\Leftarrow$ $y'' = p'(x)$ במשוואה:

$$(4+x^2)\,p'(x) - 2x\,p(x) = 0$$

$$(4+x^2)\frac{dp}{dx} = 2x\,p(x) \quad \overset{p\neq 0}{\Rightarrow} \quad \frac{dp}{p(x)} = \frac{2x}{4+x^2}\,dx$$

$$\int \frac{dp}{p(x)} = \int \frac{2x}{4+x^2}\,dx \quad \Rightarrow \ln|p| = \ln|4+x^2| + \ln|c|$$

$$\Rightarrow p(x) = c(4+x^2)$$

$$p = y' = c(4+x^2) \Rightarrow y = c\left(4x + \frac{x^3}{3}\right) + c_1$$

נציב תנאי התחלה:

$$y'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

לכן הפתרון הכללי: $\boxed{y(x) = 0}$

(*) $c = 0 \Leftarrow y = 0$ הוא פתרון למשוואה הנתונה שנכלל בפתרון הכללי שלה.

3. $yy'' - (y')^2 = 0$

נגזור $y' = p(y)$ ⇐ $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'_y \cdot p$ משוואה:

$$y \cdot p'_y \cdot p - p^2 = 0 \Rightarrow y \frac{dp}{dy} \cdot p = p^2$$

נחלק ב $p \neq 0$:

$$y \frac{dp}{dy} = p \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|p| = \ln|y| + \ln|C|$$

$$\Rightarrow p = Cy \quad (C \neq 0)$$

$$y' = p = Cy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = Cy \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int C\,dx \Leftarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = Cx + C_1 \Rightarrow \boxed{y = C_1 e^{Cx}}$$

אם $C = 0$ נקבל כי $y = k$ (k קבוע) וגם פתרון למשוואה המקורית.

שלוש הפתרונות: $y(x) = C_1 e^{Cx}$ כאשר C שונה כפשהו.

: Zadatak

$y(0) = 0 \qquad y' = 2y + 2$ .1c

$$y_1 = y_0 + \int_0^x f(t, y_0(t))\,dt = 0 + \int_0^x 2\,dt =$$

$$2t\Big|_0^x = 2x$$

$$y_2 = y_0 + \int_0^x f(t, y_1(t))\,dt = 0 + \int_0^x (2t + 2)\,dt =$$

$$2t^2 + 2t\Big|_0^x = 2x^2 + 2x$$

$$y_3 = y_0 + \int_0^x f(t, y_2(t))\,dt = 0 + \int_0^x \left(2(2t^2 + 2t) + 2\right)dt$$

$$= \frac{4t^3}{3} + 2t^2 + 2t\Big|_0^x = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + 2x$$

$$y_4 = y_0 + \int_0^x f(t, y_3(t))\,dt = 0 + \int_0^x \left(2\left(\frac{4}{3}t^3 + 2t^2 + 2t\right) + 2\right)dt$$

$$= \frac{8}{12}t^4 + \frac{4}{3}t^3 + 2t^2 + 2t\Big|_0^x$$

$$= \frac{8}{12}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + 2x =$$

$$= \frac{2^4}{4!}x^4 + \frac{2^3}{3!}x^3 + \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^1}{1!}x$$

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2x)^k}{k!} - 1$$

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(2x)^k}{k!} - 1 \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} - 1 =$$

$$= e^{2x} - 1$$

: $x = 0, 0.1, 0.2$ ואז נקבל $y_3(x)$

$$y_3(x) = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + 2x$$

: $x = 0$ עבור

$$y_3(0) = 0$$

$$y_3(0.1) = \frac{4}{3}\cdot(0.1)^3 + 2\cdot(0.1)^2 + 2(0.1) = 0.2213 \quad x = 0.1$$

$x = 0.2$

$$y_3(0.2) = \frac{4}{3}(0.2)^3 + 2(0.2)^2 + 2(0.2) = 0.4906$$

(ג)

$y(0)=1 \qquad y' = 2xy$ .p

$$y_1 = 1 + \int_0^x f(t, y_0(t))\,dt = 1 + \int_0^x 2t\,dt = 1 + 2\frac{t^2}{2}\Big|_0^x =$$

$$1 + x^2$$

$$y_2 = 1 + \int_0^x f(t, y_1(t))\,dt = 1 + \int_0^x 2(t(1+t^2))\,dt =$$

$$1 + t^2 + \frac{2}{4}t^4\Big|_0^x = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2}$$

$$y_3 = 1 + \int_0^x f(t, y_2(t))\,dt = 1 + \int_0^x 2\left(t\left(1+t^2+\frac{t^4}{2}\right)\right)dt$$

$$= 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{6}\Big|_0^x = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}$$

$$= \frac{(x^2)^0}{0!} + \frac{(x^2)^1}{1!} + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!}$$

$$y_4 = 1 + \int_0^x f(t, y_3(t))\,dt = 1 + \int_0^x 2\left(t\left(1+t^2+\frac{t^4}{2}+\frac{t^6}{6}\right)\right)dt$$

$$= 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{6} + \frac{t^8}{24}\Big|_0^x = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24}$$

$$= \frac{(x^2)^0}{0!} + \frac{(x^2)^1}{1!} + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^4}{4!}$$

$$\vdots$$

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x^2)^k}{k!} \Rightarrow y = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} =$$

$$= e^{x^2}$$

(c) $y_3(0) = 1$, $y_3(0.1) = 1.0105$ $y_3(0.2) = 1.0408$

: 3 שאלה

$y(0)=1$, $y' = 1+(x-y)^2$

$h=\frac{1}{2}$ עבור $y(4)$ של הערך המקורב

$$x_n = x_{n-1} + h$$

$$y_n = y_{n-1} + y'(x_{n-1}, y_{n-1}) \cdot h$$

$y_0 = 1$, $x_0 = 0$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y_1 = y_0 + y'(x_0, y_0) \cdot h = 1 + \left(1+(0-1)^2\right) \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$x_2 = x_1 + h = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$y_2 = y_1 + y'(x_1, y_1) \cdot h = 2 + \left(1 + \left(\frac{1}{2} - 2\right)^2\right) \cdot \frac{1}{2} = 3.625$$

$$x_3 = x_2 + h = 1 + \frac{1}{2} = 1.5$$

$$y_3 = y_2 + y'(x_2, y_2) \cdot h = 3.625 + \left(1 + (1-3.625)^2\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 7.5703$$

$$x_4 = x_3 + \frac{1}{2} = 1.5 + 0.5 = 2$$

$$y_4 = y_3 + y'(x_3, y_3) \cdot h = 7.5703 + \left(1 + (1.5 - 7.7503)^2\right) \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= 27.6034$$

$$x_5 = x_4 + h = 2 + 0.5 = 2.5$$

$$y_5 = y_4 + y'(x_4, y_4) \cdot h = 27.6034 + \left(1 + (2 - 27.6034)^2\right) \cdot \frac{1}{2}$$
$$= 355.8704$$

$$x_6 = x_5 + h = 2.5 + 0.5 = 3$$

$$y_6 = y_5 + y'(x_5, y_5) \cdot h = 355.8704 + \left(1 + (2.5 - 355.8704)^2\right) \cdot \frac{1}{2}$$
$$= 62791.19$$

$$x_7 = x_6 + h = 3 + 0.5 = 3.5$$

$$y_7 = y_6 + y'(x_6, y_6) \cdot h = 62791.19 + \left(1 + (3 - 6279.19)^2\right) \cdot \frac{1}{2}$$
$$= 19758072.15$$

$$x_8 = x_7 + h = 3.5 + 0.5 = 4$$

$$y_8 = y_7 + y'(x_7, y_7) \cdot h = 19758072.15 + \left(1 + (3.5 - 19758072.15)^2\right) \cdot \frac{1}{2}$$
$$= 1.951906 \cdot 10^{14}$$

$$y(4) \cong y_8$$

כאשר: כדי לחשב את הקירוב של הפתרון המדויק $y(4)$, נבחר בצעד $h = \frac{1}{2}$ שצריך יותר.

אם נדרש לחשב את הקירוב עם צעד יותר קטן:
h נקטן פי 10 יותר או נקרוא ליותר לפתרון.

דוגמה 4:

$y' = \frac{x}{y}$ $\quad y(0)=1$.

$y(1)$ את לחשב כדי $h=0.1$ נבחר .

$x_0 = 0$, $y_0 = 1$

$x_1 = 0.1$ $\quad y_1 = 1 + y'(0,1) \cdot 0.1 = 1$

$x_2 = 0.2$ $\quad y_2 = 1 + y'(0.1, 1) \cdot 0.1 = 1.01$

$x_3 = 0.3$ $\quad y_3 = 1.01 + y'(0.2, 1.01) \cdot 0.1 = 1.029$

$x_4 = 0.4$ $\quad y_4 = 1.029 + y'(0.3, 1.029) \cdot 0.1 = 1.058$

$x_5 = 0.5$ $\quad y_5 = 1.058 + y'(0.4, 1.058) \cdot 0.1 = 1.095$

$x_6 = 0.6$ $\quad y_6 = 1.095 + y'(0.5, 1.095) \cdot 0.1 = 1.140$

$x_7 = 0.7$ $\quad y_7 = 1.140 + y'(0.6, 1.140) \cdot 0.1 = 1.192$

$x_8 = 0.8$ $\quad y_8 = 1.192 + y'(0.7, 1.192) \cdot 0.1 = 1.250$

$x_9 = 0.9$ $\quad y_9 = 1.250 + y'(0.8, 1.250) \cdot 0.1 = 1.314$

$x_{10} = 1$ $\quad y_{10} = 1.314 + y'(0.9, 1.314) \cdot 0.1 = 1.382$

$y(1) \cong y_{10} = 1.382$

. $h=0.2$ ek⊃ $y(1)$ ʃe ,,,,,,,

$y_0=1$, $x_0=0$

$x_1=0.2$ $\quad y_1=1+y'(0,1).0.2=1$

$x_2=0.4$ $\quad y_2=1+y'(0.2,1).0.2=1.04$

$x_3=0.6$ $\quad y_3=1.04+y'(0.4,1.04).0.2=1.116$

$x_4=0.8$ $\quad y_4=1.116+y'(0.6,1.116).0.2=1.223$

$x_5=1$ $\quad y_5=1.223+y'(0.8,1.223).0.2=1.353$

$y(1)\cong 1.353$

שאלה 5:

א. $f(x,y)=4+y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2y$. $f(x,y)$! $\frac{\partial f}{\partial y}$

כדיפות בכל המישור ולכן לכל תשו' התלה ק"מ
פתרון יחיד ומקרים אחד $y(0)=1$.

ב. $f(x,y)=x\operatorname{arctg}(y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{y^2+1}$. $f(x,y)$! $\frac{\partial f}{\partial x}$

כדיפות בכל המישור ולכן לכל תשו' התלה ק"מ
פתרון יחיד ומקרים $y(0)=2$.

ג. $f(x,y)=\frac{1+y}{x}$ לא כדיפה ב $y=-1$ ובנקודות $x=0$

$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{x}$ אם לא כדיפה ב $y=-\pi$, לכן $f(x,y)$
! $\frac{\partial f}{\partial y}$ לא כדיפות בכל נק' $(1,-x)$ כאשר
x ממש'.
בפ' הבאתם בשפע נק'ם וה-יחידות בכך לפחות
מתקיים סביב הנק' $(0,0)$ שבו $f(x,y)$! $\frac{\partial f}{\partial y}$ כדיפות.
נבחר למשל $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\times(1,-1)$, לפ' משפט קיום
ויחידות קיים פתרון יחיד למשוואה עם תנאי התלה
שנמצא סביב 0 במלבן הנ"ל.