פתרון תרגיל בית מס' 3

שאלה מס' 1: נתון כי y_1 ו y_2 פתרונות של המשוואה

(*) $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$

נוכיח כי y_1+y_2 גם פתרון, כלומר y_1+y_2 מקיים את (*):

$$a_n(x)(y_1+y_2)^{(n)} + a_{n-1}(x)(y_1+y_2)^{(n-1)} + \dots + a_1(x)(y_1+y_2)' + a_0(x)(y_1+y_2) =$$

$$= a_n(x)y_1^{(n)} + a_n(x)y_2^{(n)} + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)} + a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y_1' + a_1(x)y_2' +$$

$$+ a_0(x)y_1 + a_0(x)y_2 =$$

$$= \left(a_n(x)y_1^{(n)} + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1\right) + \left(a_n(x)y_2^{(n)} + a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2\right) = 0 + 0 = 0$$

∎

שאלה מס' 2:

1) $\boxed{xy' - 4y = x^2\sqrt{y} \qquad y(1) = 0}$

נחלק במשוואה ב $x \neq 0$:

(*) $y' - 4\frac{y}{x} = x\sqrt{y} \qquad \left(n = \frac{1}{2}\right)$

כלומר $z = y^{1-n} = y^{\frac{1}{2}}$ $\Leftarrow$ $z' = \frac{1}{2}y' \cdot \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}}$

נציב ב (*). נקבל כי:

$$\Leftarrow \quad x = \frac{y'}{y^{\frac{1}{2}}} - \frac{4y^{\frac{1}{2}}}{x}$$

$$\dot{x} = 2z' - \frac{4}{x}z$$

נגדיר $z = y^2$;

$$z' - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2} \quad (**)$$

נפתור למשוואה הומוגנית, לפתרון אותה נסמן $\mu(x)$

כך ש- $(z\mu)' = (z' - \frac{2}{x}z)\mu \Leftarrow \mu' + \frac{2}{x}\mu = 0$.

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x^2} \quad (\mu = \frac{1}{x^2} \text{ נבחר})$$

$\Leftarrow$ נכפול את $(**)$ ב- μ ;

$$\left(\frac{1}{x}z\right)' = z'\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}z\cdot\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{1}{x}\cdot z\right)' = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{1}{x}\cdot z = \frac{1}{2}\ln|x| + C$$

$\Leftarrow z = \frac{1}{2}x^2\ln|x| + Cx^2$, וזכר $z = y^2$ $\Leftarrow$

$$\boxed{y = \left(\frac{x^2\ln|x|}{2} + Cx^2\right)^2} \Leftarrow y = z^2$$

$y(1) = 0 \Leftarrow C = 0$, פתרון פרט: $\boxed{y = \left(\frac{x^2\ln|x|}{2}\right)^2}$

2) $\boxed{xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2}$

נגדיר $x \neq 0$;

$$y' - \left(2 + \frac{1}{x}\right)y + \frac{y^2}{x} = -x \quad (*)$$

(משוואת ריקטי)

נתון פתרון פרטי, קל לנחש ש- $y = x$ פתרון פרטי למשוואה.

נכתוב $y(x) = y_1(x) + z$ $\Leftarrow$

$\Leftarrow$

$$y' = 1 + z'$$

נציב במשוואה (*):

$$z' + \left(2+\frac{1}{x}\right)\cdot(z+x) + \frac{(z+x)^2}{x} = -x$$

$$\Leftarrow \quad z' - \frac{1}{x}z = z^2 \qquad (**)$$

זו בדיוק משוואת ברנולי.

$$\boxed{z=u}, \quad \frac{1}{z} = z^{-1} = u \Leftarrow \quad z = \frac{1}{u} \Leftarrow \quad z' = -\frac{u'}{u^2}$$ נציב ב (**)

$$-\frac{u'}{u^2} - \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{u} = \frac{1}{u^2}$$

נכפול ב $-u^2 \neq 0$

$$u' + \frac{u}{x} = -\frac{1}{x} \Leftarrow \quad -u' = \frac{u}{x} + \frac{1}{x}$$

$u' + \frac{1}{x}u = 0$

נוכיח נוסחה כללית: $y' + f(x)y = g(x)$ $\Rightarrow$ $\mu(x) = e^{\int f\,dx}$ $\Rightarrow$ $(\mu y)' = \mu g$

$$\Leftarrow \quad (xu)' = 1 \quad \Leftarrow \quad xu = x + C \quad \Leftarrow \quad u = 1 + \frac{C}{x}$$

$$\text{נציב} \quad z = \frac{1}{u} \quad \Leftarrow \quad z = \frac{1}{1+\frac{C}{x}}$$

$$\boxed{y = x + \frac{1}{1+\frac{C}{x}}}$$

כלומר, אפשר כך:
לכל $\frac{1}{z} + y = y$
כפי שעשינו בכיתה עקרון
משוואת ברנולי, תרגיל
תקבלו אותו פתרון.

3) $\boxed{y' = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}}$, $y' = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2}\cdot y^{-1} \Leftarrow \quad y' - \frac{y}{2x} = \frac{x^2}{2}y^{-1}$

כלומר

$$\Leftarrow \quad y = z^{\frac{1}{2}} \quad \Leftarrow \quad z = y^2 \text{ נציב} \quad \boxed{n=-1}$$

$z' = \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}$. נציב במשוואה:

$$\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\cdot z' = \frac{z^{\frac{1}{2}}}{x^2} + \frac{x^2}{\frac{1}{2}z\cdot 2}$$

$$z^{-\frac{1}{2}}\cdot z' = \frac{z^{\frac{1}{2}}}{x} + x^2 \cdot \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}$$

נסמן $z^{\frac{1}{2}}$ ב:

$$z' = \frac{z}{x} + x^2 \quad \Rightarrow \quad z' - \frac{z}{x} = x^2$$

מד"ר לינארית לכל המקדמים.

נחפש $\mu(x)$ (נזכור שלא נוסיף כ).

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

$$(xz)' = x \quad \Rightarrow \quad xz = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow z = \frac{x^3}{3} + \frac{C}{x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \sqrt{\frac{x^3}{3} + \frac{C}{x}}}$$

ג. $\boxed{xy' + y = xy^2 \ln x \quad , \quad y(1) = 1}$

נתנאי: $x \neq 0$

$$(*)\quad y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln x$$

נבצע $z = y^{-1} \Leftrightarrow y = z^{-1}$ כלומר $y = \frac{1}{z}$.

$$y' = -\frac{z'}{z^2}$$ נציב במשוואה (*):

$$-\frac{z'}{z^2} + \frac{z^{-1}}{x} = (z^{-1})^2 \ln x$$

נכפול ב $-z^2$:

$$z' - \frac{z}{x} = -\ln x$$

מד"ר לינארית לכל המקדמים. $z' - \frac{z}{x} = -\ln x$ $\leftarrow$ נחפש μ' כך ש $\mu = \frac{\mu'}{x}$

גורם אינטגרציה:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

$$-\frac{1}{x}\cdot\ln x = \left(\frac{1}{x}z\right)'$$

$$-\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{x}z$$

$$\frac{\ln^2 x}{2}+c = \frac{1}{x}z \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{x\ln^2 x}{2}+cx$$

$$\boxed{y=\frac{1}{z}=\frac{2}{2cx-x\ln^2 x}}$$

$$\boxed{y=\frac{2}{2x-x\ln^2 x}} \quad \text{מתקיים} \quad c=1 \Leftarrow y(1)=1$$

3 שאלה:

1) $\boxed{2xy^2+2y+(2x^2y+2x)y'=0}$

$$2xy^2+2y = -(2x^2y+2x)\frac{dy}{dx}$$

$$(2xy^2+2y)dx+(2x^2y+2x)dy=0$$

$$M = 2xy^2+2y \qquad N = 2x^2y+2x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy+2 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy+2$$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ $\Leftarrow$ המשוואה מדויקת.

$$\psi(x,y)=\int M\,dx = \int(2xy^2+2y)\,dx = x^2y^2+2yx+C(y)$$

סעיף 1:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = N$$

$$\| $$

$$2x^2y + 2x + c'(y) = 2x^2y + 2x$$

$$c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = const$$

$$\boxed{x^2y^2 + 2yx = c}$$ פתרון כללי:

$y(1) = 1 \Leftarrow c = 3$, פתרון פרט: $\boxed{x^2y^2 + 2yx = 3}$.

2) $$\boxed{\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx + \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dy = 0}$$

$$M = \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad N = \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2yx}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{3yx}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

לכן מד"ק מדויקת.

$$\psi(x,y) = \int M\,dx = \int \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{-1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} +$$

$$+ c(y)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = N \Rightarrow \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + c'(y) = \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow C(y) = \text{const}$$

פתרון כללי: $\Rightarrow \quad \frac{-1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = C$

3) $\boxed{\left(\frac{y}{x} + 6x\right)dx + (\ln x - 2)dy = 0}$

$$M = \frac{y}{x} + 6x \quad , \quad N = \ln x - 2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

לכן המד"ר מדויקת.

$$\psi(x,y) = \int N\,dy = \int \ln x - 2 \; dy = y\ln x - 2y + C(x)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} + C'(x) = \frac{y}{x} + 6x$$

$$C'(x) = 6x \quad \Rightarrow C(x) = 3x^2$$

פתרון כללי: $\boxed{y\ln x - 2y + 3x^2 = C}$

4) $(x^2 + xy)dy + (3xy + y^2)dx = 0$

$$M = 3xy + y^2 \quad , \quad N = x^2 + xy$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 2y \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + y$$

$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \Leftarrow$ המד"ר לא מדויקת.

נחפש גורם אינטגרציה מהצורה:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N} = \frac{2x+y-3x-2y}{x^2+xy} =$$

$$= \frac{-x-y}{x^2+xy} = -\frac{(x+y)}{x(x+y)} = -\frac{1}{x}$$

$$\mu(x) = e^{-\int -\frac{1}{x}dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = x$$

נכפיל את המשוואה בגורם האינטגרציה:

$$x(3xy+y^2)dx + x(x^2+xy)dy = 0$$

$$\underbrace{(3x^2y+xy^2)}_{M^*}dx + \underbrace{(x^3+x^2y)}_{N^*}dy = 0$$

$$\frac{\partial M^*}{\partial y} = 3x^2+2xy = \frac{\partial N^*}{\partial x} = 3x^2+2xy$$

$\Rightarrow$ מד"ר מדויקת.

$$\psi(x,y) = \int M^* dx = \int (3x^2y+xy^2)dx =$$

$$= x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + C(y)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = N^* \Rightarrow x^3 + x^2y + C'(y) = x^3 + x^2y$$

$$C'(y) = 0$$

$\Rightarrow C(y) = const \Rightarrow$ פתרון כללי: $\boxed{x^3y + \frac{x^2y^2}{2} = C}$

$y(0) = 0 \Rightarrow C = 0$, פתרון פרט': $\boxed{x^3y + \frac{x^2y^2}{2} = 0}$

שאלה מס' 4: (10)

נכפיל את המשוואה בגורם המוביל $\mu(x,y)=x^2y$ כדי לקבל משוואה מדויקת:

$$\underbrace{(4x^3y^2+3x^2y^4)}_{M^*}dx+\underbrace{(x^2y\,g(x)+4x^3y^3)}_{N^*}dy=0$$

$$\Leftarrow \text{משוואה מדויקת כלומר } \frac{\partial N^*}{\partial x}=\frac{\partial M^*}{\partial y}$$

$$2xy\,g(x)+x^2y\,g'(x)+12x^2y^3=8x^3y^3+12x^2y^3$$

$$\boxed{x^2y\,g'(x)+2xy\,g(x)=8x^3y^3}$$

כלומר משוואה לינארית מסדר 1 עבור $g'(x)$.

נחלק ב x^2y ונקבל:

$$g'(x)+\frac{2}{x}g(x)=8x$$

גורם אינטגרציה:

$$\mu_0(x)=e^{\int\frac{2}{x}dx}=x^2$$

סה"כ:

$$(x^2g(x))'=8x^3$$

$$x^2g(x)=\frac{8x^4}{4}+C \Rightarrow g(x)=2x^2+\frac{C}{x^2}$$

$$g(1)=2 \Leftarrow C=0 \Leftarrow g(x)=2x^2.$$

תזכורת: $(\mu y)'=\mu'y+\mu y'$

כמו כן $g(x)=y$, $g'(x)=y'$.

(כ) נתון $g(x)=2x^2$ המקיים כי המד"ר הבאה

$$\underbrace{(4x^3y^2+3x^2y^4)}_{M^*}dx+\underbrace{(2x^4y+4x^3y^3)}_{N^*}dy=0$$

$$\psi(x,y)=\int M^*dx=\int(4x^3y^2+3x^2y^4)dx=$$

$$=x^4y^2+x^3y^4+C(y)$$

מצד 1:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=N^*=$$

$$2x^4y+4x^3y^3+C'(y)=2x^4y+4x^3y^3$$

$$\Rightarrow C'(y)=0 \Rightarrow C(y)=\text{const}$$ פתרון כללי:

$$\boxed{C=x^4y^2+x^3y^4}$$

שאלה מס' 5:

רק עבור $y=0$ ו- $y=2$ פתרונות למד"ר הנתונה.

אם $\tilde{y}(x)$ פתרון הבעיה עבור $(1,1)$ עד כמה הפונק' $\tilde{y}(x)$ עד תותן את הישרים $y=0$; $y=2$, איזה נקבע משפט הקיום והיחידות? נדון בשלבי:

כי $\tilde{y}(x)$ תותן למשל את $y=2$ בנק' $(x_0,2)$ אזי

עתה, הפתרון $y(x_0)=2$ יש 2 פתרונות שונים $\tilde{y}(x)$! $y=2$ כמתואר במשפט הקיום והיחידות.

ולכן $\tilde{y}(x)>0$ לכל x בתחום הבדוק.

$(m=0,\ M=2)$