פתרון תרגיל מס' 2

שאלה 1:

1) $(y^3+x^3)dx + xy^2 dy = 0$

$(y^3+x^3)dx = -xy^2 dy$

נניח ש $x^3 \neq 0$:

$\left(\left(\frac{y}{x}\right)^3 + 1\right)dx = -\left(\frac{y}{x}\right)^2 dy$

(*) $\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^3+1}{-\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{dy}{dx}$

נציב $z = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = zx$, $y' = z'x + z$ ב(*)

ונקבל:

$\frac{z^3+1}{-z^2} = z'x + z$

$\frac{z^3+1}{-z^2} - z = \frac{dz}{dx}x \Rightarrow \frac{2z^3+1}{-z^2} = \frac{dz}{dx} \cdot x$

$\Rightarrow -\frac{dx}{x} = \frac{z^2}{2z^3+1}dz \Rightarrow -\ln|x| + \ln|c| = \frac{1}{6}\ln|2z^3+1|$ $\quad 2z^3+1 \neq 0$

$\frac{c}{x} = (2z^3+1)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2z^3+1}$

נציב $z = \frac{y}{x} \Leftarrow$

$\frac{c}{x} = \sqrt[6]{2\left(\frac{y}{x}\right)^3+1}$

נבדוק אם יש פתרון כאשר $2z^3+1=0 \Leftarrow z = \frac{-1}{\sqrt[3]{2}}$

$\Leftarrow \frac{y}{x} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Leftarrow y = \frac{-x}{\sqrt[3]{2}}$ נציב ב(*) ונקבל

שגם זה פתרון למשוואה.

2. $\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx - x\,dy = 0$

$$y+\sqrt{x^2+y^2} = x\frac{dy}{dx} \Rightarrow y+\sqrt{x^2+y^2} = xy'$$

נתון כי $x \neq 0$:

$$\text{(*)}\quad \frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = y'$$

נגדיר $z=\frac{y}{x} \Leftarrow y=zx \Leftarrow y'=z'x+z$, ונציב ב-(*):

$$z+\sqrt{1+z^2} = z'x+z$$

$$\sqrt{1+z^2} = \frac{dz}{dx}\cdot x$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} \underset{\text{מתקיים } 0<z^2+1}{\Rightarrow} \ln|c|+\ln|x| = \ln\left|z+\sqrt{z^2+1}\right|$$

$$\Rightarrow z+\sqrt{z^2+1} = cx$$

נחזור למשתנים המקוריים:

$$\frac{y}{x}+\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1} = cx$$

נציב $y(1)=0$:

$$0+\sqrt{0+1} = c\cdot 1 \Rightarrow c=1$$

לכן פתרון למשוואה הנתונה עם תנאי ההתחלה הנתון הוא:

$$\frac{y}{x}+\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1} = x$$

3. $y' = \frac{2xy\,e^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2 e^{(x/y)^2} + 2x^2 e^{(x/y)^2}}$

נחשב: נגזור x כפונקציה של y.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy\,e^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2 e^{(x/y)^2} + 2x^2 e^{(x/y)^2}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^2 + y^2 e^{(x/y)^2} + 2x^2 e^{(x/y)^2}}{2xy\,e^{(x/y)^2}}$$

נגזור x כפונקציה של y ונשתמש

נניח $y^2 \neq 0$:

$$(*)\quad \frac{dx}{dy} = \frac{1 + e^{(x/y)^2} + 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 e^{(x/y)^2}}{2\frac{x}{y}\,e^{(x/y)^2}}$$

נגזור ב-(*): $z = \frac{x}{y} \Leftarrow x = zy \Rightarrow x' = z'y + z$

$$z'y + z = \frac{1 + e^{z^2} + 2z^2 e^{z^2}}{2ze^{z^2}} \Rightarrow z'y = \frac{1 + e^{z^2} + 2z^2 e^{z^2}}{2ze^{z^2}} - z = \frac{1 + e^{z^2}}{2ze^{z^2}}$$

$$\frac{dz}{dy}\cdot y = \frac{1 + e^{z^2}}{2ze^{z^2}} \Rightarrow \frac{2ze^{z^2}}{1 + e^{z^2}} = \frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{2ze^{z^2}}{1 + e^{z^2}}\,dz = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|1 + e^{z^2}| = \ln|y| + C$$

$$\Rightarrow \ln|1 + e^{(x/y)^2}| = \ln|y| + C$$

$t = 1 + e^{z^2}$

$dt = 2ze^{z^2}\,dz$

$\int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t|$

שאלה 2:

$$(y^2+x^2)\,dx + xy^n\,dy = 0$$

1.

$$(y^2+x^2) = -xy^n \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{-y^2-x^2}{xy^n} = y'$$

נאמר שזו n נקבע $f(x,y)=f(\alpha x,\alpha y)$.

$$f(\alpha x,\alpha y) = \frac{-(\alpha y)^2-(\alpha x)^2}{\alpha x(\alpha y)^n} = \frac{\alpha^2(-y^2-x^2)}{\alpha^n xy^n \alpha}$$

כדי שנקבע $f(x,y)=f(\alpha x,\alpha y)$, צריך שמתקיים $n=1$.

$$= \frac{\alpha^2(-y^2-x^2)}{\alpha\cdot\alpha\, x.y} = \frac{-y^2-x^2}{xy} = f(x,y)$$

2.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2-x^2}{xy}$$

נתון $x^2 \neq 0$:

(א) $$\frac{dy}{dx} = \frac{-\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{\frac{y}{x}}$$

נגזיר (א): $z = \frac{y}{x} \Leftarrow y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$

$$z'x + z = \frac{-z^2-1}{z} \Rightarrow z'x = \frac{-z^2-1}{z} - z =$$

$$= \frac{-z^2-1-z^2}{z} = \frac{-2z^2-1}{z} = -\frac{(1+2z^2)}{z}$$

$$\frac{dz}{dx}x = -\frac{(2z^2+1)}{z}$$

$$\frac{z}{2z^2+1}\,dz = -\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{4}\ln|2z^2+1| = -\ln|x| + \ln|c|$$

$$\ln|2z^2+1|^{\frac{1}{4}} = \ln\left|\frac{c}{x}\right|$$

$$\sqrt[4]{(2z^2+1)} = \frac{c}{x}$$

נחזור למשתנים המקוריים:

$$\sqrt[4]{2\left(\frac{y}{x}\right)^2+1} = \frac{c}{x}$$

<u>שאלה 3</u>:

$$(*)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{3+x+2y}{1+x+y}$$

נבדוק אם הישרים נחתכים או מקבילים:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1 \neq 0$$

הישרים נחתכים, נמצא נק' החיתוך:

$$x+2y+3=0$$
$$-\quad x+y+1=0$$
$$y=-2 \qquad \Rightarrow \quad 0=1+2-x \quad \Rightarrow \quad x=1$$

נק' החיתוך $(-2,1)$

<u>נבצע הצבת ז'ירס</u>:

$$x_1 = x - 1 \Rightarrow x = x_1 + 1$$
$$y_1 = y + 2 \Rightarrow y = y_1 - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{3 + (x_1+1) + 2(y_1-2)}{1 + (x_1+1) + (y_1-2)} = \frac{x_1 + 2y_1}{x_1 + y_1} \overset{x_1 \neq 0}{=} \frac{1 + 2\frac{y_1}{x_1}}{1 + \frac{y_1}{x_1}}$$

נגדיר

$$z = \frac{y_1}{x_1} \Leftarrow z x_1 = y_1 \Leftarrow z'x_1 + z = y_1'$$

$$z'x_1 + z = \frac{1+2z}{1+z} \Rightarrow z'x_1 = -\frac{z^2+z+1}{1+z}$$

$$\frac{dz}{dx_1} x_1 = -\frac{z^2+z+1}{1+z} \Rightarrow \frac{1+z}{-z^2+z+1} dz = \frac{dx_1}{x_1}$$

$$-z^2+z+1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2\,\text{arctgh}\left(\frac{2(z-\frac{1}{2})}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5}} + \frac{4\left(\text{arctgh}\left(\frac{2(z-\frac{1}{2})}{\sqrt{5}}\right)\right)}{\sqrt{5}} - \frac{-\ln\left(4 - 16\frac{(z-\frac{1}{2})^2}{5}\right)}{8} = \ln|x| + c$$

נציב ונקבל $z = \frac{x_1}{y_1}$.

פתרונות נוספים למשוואה:

$$-z^2+z+1 = 0$$
$$z^2 - z - 1 = 0$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Leftarrow y_1 = \frac{2x_1}{1-\sqrt{5}} \Leftarrow y = y_1 - 2 \overset{\text{נזכר}}{=} x_1 + 1 = x$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftarrow y_1 = \frac{2x_1}{1+\sqrt{5}} \Leftarrow y = y_1 - 2 = x_1 + 1 = x$$

נקבל שכל פתרון.

2. $(x+2y+3)\,dx + (2x+4y-1)\,dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x+2y+3)}{2x+4y-1} = -\frac{(x+2y+3)}{2(x+2y)-1}$$

נציב משתנה עזר כדי לפשט את המשוואה: $z = x+2y$

נגזור משתנה עזר זה:

$$z' = 1+2y' \Rightarrow y' = \frac{z'-1}{2}$$

$$\frac{z'-1}{2} = -\frac{(z+3)}{2z-1} \Rightarrow z'-1 = -\frac{2(z+3)}{2z-1}$$

$$z' = -\frac{7}{2z-1} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{7}{1-2z}$$

$$\int (1-2z)\,dz = \int 7\,dx \Rightarrow z-z^2 = 7x+C$$

נחזיר משתנים במשוואה:

$$(x+2y)-(x+2y)^2 = 7x+C$$

שאלה 4:

$$y' - \frac{1}{2}y = 2\cos x$$

נרצה $\mu \neq 0$ כך ש-

$$\mu\left(y' - \frac{1}{2}y\right) = (\mu y)' = \mu' y + \mu y'$$

$$\mu y' - \frac{1}{2}\mu y = \mu' y + \mu y' \Rightarrow \frac{1}{2}\mu y = \mu' y$$

נמצא ש- μ שמקיים:

$$\mu' + \frac{1}{2}\mu = 0$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{1}{2}dx \Rightarrow \ln|\mu| = -\frac{1}{2}x + C$$

$$\mu = \mathbb{C}e^{-\frac{1}{2}x}$$

נבחר $C = 1$ ונבחר $\mu = e^{-\frac{1}{2}x}$, ומקיים:

$$\left(e^{-\frac{1}{2}x} y\right)' = 2\cos x \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$e^{-\frac{1}{2}x} y = \int 2\cos x\, e^{-\frac{1}{2}x}\, dx$$

$$\int \cos x\, e^{-\frac{1}{2}x}\, dx \underset{\text{נגזרת}}{\overset{\text{נגזרת}}{=}} \sin x\, e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}\int \sin x\, e^{-\frac{1}{2}x}\, dx$$

$$= \sin x\, e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}\left[-\cos x\, e^{-\frac{1}{2}x} - \int -\cos x\, e^{-\frac{1}{2}x} \cdot -\frac{1}{2}\, dx\right]$$

$$= \sin x\, e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}\cos x\, e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{4}\int \cos x\, e^{-\frac{1}{2}x}\, dx$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}\int \cos x\, e^{-\frac{1}{2}x}\, dx = e^{-\frac{1}{2}x}\left(\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right)$$

$$\int \cos x\, e^{-\frac{1}{2}x}\, dx = \frac{4}{5} e^{-\frac{1}{2}x}\left(\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right) + C$$

$$y = \frac{\frac{8}{5} e^{-\frac{1}{2}x}\left(\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right) + C}{e^{-\frac{1}{2}x}} =$$

$$= \frac{8}{5}\left(\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right) + C \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

פתרון: נציב תנאי ההתחלה: $y(0)=a$:

$$y(0) = a \Rightarrow a = \frac{8}{5}\left(0 - \frac{1}{2}\right) + C \Rightarrow a = -\frac{4}{5} + C$$

$$\Rightarrow C = \left(a + \frac{4}{5}\right)$$

לכן:

$$y(x) = \frac{8}{5}\sin x - \frac{4}{5}\cos x + \left(a + \frac{4}{5}\right) e^{\frac{1}{2}x}$$

אם $a > -\frac{4}{5}$ אז מקדם של $e^{\frac{1}{2}x}$ חיובי ולכן $\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$, (כיוון ש $\frac{8}{5}\sin x - \frac{4}{5}\cos x$ חסום).

אם $a < -\frac{4}{5}$ אז מקדם של $e^{\frac{1}{2}x}$ שלילי ולכן $\lim_{x\to\infty} y(x) = -\infty$.

אם $a = -\frac{4}{5}$ אז $\lim_{x\to\infty} y(x)$ קיים ושווה ל 0.

שאלה 5:

1) $xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x$

נחלק ב $x \neq 0$:

$$y' = \frac{y}{x} + x^2 + 3x - 2$$

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2$$

נסמן $p(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2 + 3x - 2$. נכפול

ב $\mu(x) \neq 0$ ונקבל

$$\mu(x)y' - \mu(x)\frac{y}{x} = \mu(x)y'$$

כלומר

$$\mu(x)y' - \mu(x)\frac{y}{x} = (\mu(x)y)' = \mu(x)y' + \mu'(x)y$$

$$-\frac{y}{x}\mu(x) = \mu'(x)y$$

נמצא ש- μ מקיים $\mu'(x) + \frac{\mu(x)}{x} = 0$

$$\mu(x) = \mu_0 \cdot \frac{1}{x}$$ $\Leftarrow$

נבחר $\mu_0 = 1$ (בשביל הנוחות). $\mu(x) = \frac{1}{x}$

כלומר:

$$(\mu(x)y)' = \mu(x) \cdot (x^2 + 3x - 2)$$

$$\mu(x)y = \int \mu(x) \cdot (x^2 + 3x - 2)dx + \tilde{C}$$

$$\frac{1}{x}y = \int \frac{1}{x} \cdot (x^2 + 3x - 2)dx + \tilde{C}$$

$$\frac{1}{x}(x^2+3x-2) = x+3-\frac{2}{x}$$

$$\int \frac{1}{x}(x^2+3x-2)\,dx = \frac{x^2}{2}+3x-2\ln x$$

$$\frac{1}{x}y = \frac{x^2}{2}+3x-2\ln x+\tilde{C}$$

$$y = \frac{x^3}{2}+3x^2-2x\ln x+\tilde{C}x$$

$$\boxed{y(x) = \frac{x^3}{2}+3x^2-2x\ln x+Cx}$$

2. $x^2y'+2xy = \cos x \qquad y(\pi)=0$

פתרון: נשלק ב $x^2 \neq 0$:

$$y'+\frac{2}{x}y = \frac{\cos x}{x^2}$$

נכפול ב $\mu(x) \neq 0$

$$\mu(x)y'+2\mu(x)\frac{y}{x} = \mu(x)\frac{\cos x}{x^2}$$

נדרוש:

$$\mu'(x)y+\mu(x)y' = (\mu(x)y)' = \mu(x)y'+2\mu(x)\frac{y}{x}$$

$$\Leftarrow \quad \mu'(x)y = 2\mu(x)\frac{y}{x}$$

$$\Leftarrow \quad \mu'(x) = \frac{2}{x}\mu(x) \Rightarrow \boxed{\mu(x)=\mu_0 x^2}$$

אפשר ב"ם לבחור $\mu_0=1$ לפשטות.

מכפ"ל:

$$(\mu(x)y)' = \mu(x)g(x)$$

נפרק

$$\mu(x)y = \int \mu\, g(x)\,dx + \tilde{C}$$

$$\mu(x)y = \int \mu_0 x^2 \cdot \frac{\cos x}{x^2}\,dx + \tilde{C} =$$

$$\mu(x)y = \mu_0 \sin x + \tilde{C}$$

$$y = \frac{\mu_0 \sin x}{\mu(x)} + \frac{\tilde{C}}{\mu(x)} = \frac{\mu_0 \sin x}{\mu_0 x^2} + \frac{\tilde{C}}{\mu_0 x^2} =$$

$$= \frac{\sin x}{x^2} + \frac{C}{x^2}, \quad \left(C = \frac{\tilde{C}}{\mu_0}\right)$$

נציב תנאי התחלה $y(\pi) = 0$:

$$0 = \frac{\sin\pi}{\pi^2} + \frac{C}{\pi^2} \Rightarrow C = 0$$

לכן פתרון למשוואה המקיים תנאי התחלה הוא

$$\boxed{y = \frac{\sin x}{x^2}}$$

3. $\frac{dy}{dx} + y\cot x = 5e^{\cos x}$

פתרון:

$$y' + y\cot x = 5e^{\cos x}$$

$$g(x) = 5e^{\cos x}, \quad p(x) = \cot x$$

$$\mu'(x)y = \mu(x)y\cot x$$

$$\mu'(x) = \mu(x)\cot x$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \cot x\,dx$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$\ln|\mu| = \ln|\sin x| + \ln|\mu_0|$$

$$\boxed{\mu(x) = \mu_0 \sin x}$$

דרך 2:

$$(\mu(x)y)' = \mu(x)g(x)$$

$$\mu(x)y = \int \mu(x)g(x)\,dx + \tilde{C}$$

$$y\cdot \mu_0 \sin x = \int \mu_0 \sin x \cdot 5e^{\cos x}\,dx + \tilde{C}$$

$$-\int \sin x \cdot 5e^{\cos x}\,dx = 5\int \sin x\, e^{\cos x}\,dx = -5\int e^t\,dt$$

$t = \cos x$
$dt = -\sin x\,dx$

$$= -5e^t = -5e^{\cos x}$$

$$y\cdot \mu_0 \sin x = -5\mu_0 e^{\cos x} + \tilde{C}$$

$$y = \frac{-5e^{\cos x}}{\sin x} + \frac{\tilde{C}}{\mu_0 \sin x} = \frac{-5e^{\cos x}}{\sin x} + \frac{C}{\sin x}$$

$$\boxed{C = \frac{\tilde{C}}{\mu_0}}$$