פתרון תרגיל בית מס' 1

שאלה 1:

1) המשוואה מסדר 3, לינארית אבל הומוגנית.
2) המשוואה מסדר 1, גם לינארית.
3) המשוואה מסדר 4, לינארית הומוגנית.
4) המשוואה מסדר 1, לינארית הומוגנית.

שאלה 2:

1) נבדוק אם $y(x)=x-3$ הוא פתרון של $y' = \frac{2y-y^2}{y+x-2}$.
צד שמאל שווה ל 1. נבדוק אם צד ימין שווה ל 1.
אז $y=x-3$ פתרון למשוואה.
$$\frac{2(x-3)-(x-3)^2}{4-(x-3)-2x} = \frac{5+x-x^2}{1-x} = 1$$

2) נבדוק אם $y(x)=\frac{x}{1-x}$ הוא פתרון של $xdy+ydx=0$ (y^2 אבל שקול ל $y' = \frac{y-y^2}{x}$. צד שמאל שווה ל $-\frac{1}{(x-1)^2}$. נראה שגם צד ימין שווה ל $-\frac{1}{(x-1)^2}$.

$$\frac{\left(\frac{x}{1-x}\right)^2-\left(\frac{x}{1-x}\right)}{x} = \frac{\frac{x^2}{(1-x)^2}-\frac{x}{1-x}}{x} = \frac{\frac{x^2-(1-x)x}{(1-x)^2}}{x} = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

אז $y=\frac{x}{1-x}$ הוא פתרון למשוואה. $-\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{*}{x-}$

3) נבדוק אם $y(x) = x + \frac{1}{x+1}$ כאשר פתרון של $y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2$.
אבל שאכן שווה ל $1 - \frac{1}{(x+1)^2}$, נבדוק אם אבל אינן שווה:

$1 - \frac{1}{(x+1)^2}$.

$$\dots = 1 + x^2 - 2x\left(1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right)^2$$

$$= (x+1)^2\left[x^4 - 2x^2 + 2x - 1\right] + 1 \neq 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$$

שאלה 3 : כי $y(x) = x + \frac{1}{x+1}$ פתרון למשוואה.

1)
$$\int \frac{dy}{y^2+4} = \int 2x\,dx$$

מיד!

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{2}\right) = x^2 + C$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{2}\right) = 2x^2 + C \Rightarrow \frac{y}{2} = \operatorname{tg}(2x^2 + C) \Rightarrow y = 2\operatorname{tg}(2x^2 + C)$$

2)
$$y' + y^2 \sin x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} + y^2 \sin x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 \sin x \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = -\sin x\,dx$$

אינטגרציה על שני צדי המשוואה:

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\int \sin x\,dx$$

$$-\frac{1}{y} = \cos x + C \Rightarrow y = -\frac{1}{\cos x + C}$$

כאשר נתון $y(\pi) = 1$.

$$y(\pi) = 1 = -\frac{1}{-1 + C} \Rightarrow C = 0$$

ג.

$$(x^2y-2+2x^2-y)\,dx-(xy^2-4-4x+y^2)\,dy=0$$

$$(y(x^2-1)+2(x^2-1))\,dx=(x(y^2-4)+(y^2-4))\,dy$$

$$(x^2-1)(y+2)\,dx=(y^2-4)(x+1)\,dy$$

$$\frac{x^2-1}{x+1}\,dx=\frac{y^2-4}{y+2}\,dy$$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}\,dx=\frac{(y-2)(y+2)}{y+2}\,dy \qquad y+2\neq 0$$

$$\int(x-1)\,dx=\int(y-2)\,dy$$

אינטגרציה על שני צדדים

$$\frac{x^2}{2}-x+C=\frac{y^2}{2}-2y$$

נבדוק $y=-2$:

$$(-2x^2-2+2x^2+2)\,dx-(4x-4-4x+4)\,dy=0$$

$0=0$ נכון לכל x.

$y=-2$ פתרון סינגולרי.

ד.

$$yy'\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1+y^2}=0$$

$$y\frac{dy}{dx}\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1+y^2}=0$$

$$y\,dy\sqrt{1+x^2}=-x\sqrt{1+y^2}\,dx$$

$$\int\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,dy=\int\frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$\sqrt{1+y^2}=-\sqrt{1+x^2}+C$$

שאלה 4:

$y(x)=e^{ax}$, $y'(x)=ae^{ax}$, $y''(x)=a^2e^{ax}$

נציב במשוואה הנתונה:

$$a^2e^{ax}-4ae^{ax}+3e^{ax}=0$$

נחלק ב e^{ax}:

$$a^2-4a+3=0$$

$$(a-3)(a-1)=0 \Rightarrow a=3 \ , \ a=1$$

מכאן $a=1$ ו $a=3$ נקבל כי $y(x)=e^{ax}$ פתרון של המשוואה $y''-4y'+3y=0$.

שאלה 5:

א. $y(x)=\frac{1}{x+1}$, $y'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$, $y''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}$

נציב במשוואה הנתונה ונבדוק כאשר נקבל שוויון.

$$x(x+1)\left(\frac{2}{(x+1)^3}\right)-2\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right)-\frac{2}{x+1} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\frac{2x}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\frac{2x+2-2(x+1)}{(x+1)^2} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\frac{0}{(x+1)^2}=0$$

לכן $y(x)$ פתרון למשוואה הנתונה.

ב. $y(x)$ כנ"ל פתרון של המשוואה לכל ערך x.

נגדיר $g(x)=y(x)+\alpha x^2+\beta x+\gamma$

$$g'(x) = y'(x) + 2\alpha x + \beta$$

$$g''(x) = y''(x) + 2\alpha$$

נציב במשוואה הנתונה:

$$x(x+1)\left(y''(x)+2\alpha\right) - 2\left(y'(x)+2\alpha x+\beta\right) + 2\left(y(x)+\alpha x^2+\beta x+\gamma\right) = 0$$

אם $y(x)$ פתרון של

$$x(x+1)y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0$$

אזי:

$$x(x+1)\,2\alpha - 2\alpha x - 2\beta + 2\alpha x^2 + 2\beta x + 2\gamma = 0$$

$$2\alpha x + 2\beta x - 2\beta + 2\gamma = 0$$

נחלק ב-2:

$$\alpha x + \beta x + \beta + \gamma = 0$$

$$x(\alpha+\beta) + (\beta+\gamma) = 0$$

g פתרון $\Leftrightarrow$ $\alpha+\beta=0$ וגם $\beta+\gamma=0$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$\boxed{\beta=-\alpha}$ $\boxed{\beta=-\gamma}$

$\Searrow$ $\Swarrow$

$\boxed{\alpha=\gamma}$

נדרוש $g(1)=0$

$$g(1) = y(1) + \alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} + \alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\Leftarrow \quad \alpha = -\frac{1}{2} \quad \Leftarrow \quad \gamma = -\frac{1}{2} \quad \Leftarrow \quad \beta = \frac{1}{2}$$

$$\Leftarrow \quad g(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$