בחינה סופית משוואות דיפרנציאליות רגילות 210.2125

מועד: א   משך הבחינה: $2\frac{1}{2}$ שעות   מרצה: פרופ' תאופיק מנסור   תאריך: 17.6.2018   סמסטר: ב תשע"ח

הוראות לנבחן: (1) הבחינה מורכבת מ-6 שאלות. כל שאלה מזכה ב- 20 נקודות המתחלקות באופן שווה בין סעיפיה. יש להשיב על **5 שאלות בדיוק** אשר תשובה ללא נימוק נחשבת כשאלה ללא תשובה. (2) אין להשתמש בחומר עזר כלשהו וגם לא במחשבון. (3) נא לכתוב בעט שחור או כחול בלבד. (4) **אין להעתיק אף שאלה משאלות הבחינה רק לציין את מספרה.**

שאלה 1:

א. נתונה בעיית ההתחלה $\begin{cases} y' + ytanx = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$. כמה פתרונות יש לבעיית ההתחלה הנ"ל? הסבירו מדוע התוצאות אינן עומדות בסתירה למשפט הקיום והיחידות?

ב. בהינתן המשוואה $y' = (y-1)(y-2)(y-3)$. הוכיחו כי פתרון משוואה זו תחת התנאי $y(x_0) = y_0$ כאשר $2 < y_0 < 3$ מקיים את ההערכה $2 < y(x) < 3$ וגם $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 2$.

שאלה 2: נתונה הבעייה $-(xu')' = \lambda x^{-1}u$ כאשר $1 < x < e$, $u(1) = u'(e) = 0$.

א. מצאו את כל הערכים העצמים ואת כל הפונקציות העצמיות המתאימות.

ב. הוכיחו בעזרת סעיף א' שמתקיים $\frac{\pi}{4} = \sum_{k\geq1} \frac{1}{2k-1} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2} ln(x)\right)$.

שאלה 3: נתונה בעייה הבאה: $\begin{cases} u_t - u_{xx} = \sin(2\pi x) + 1, 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x,0) = x + \sin(3\pi x), \quad 0 < x < 1 \\ u(0,t) = t, u(1,t) = t+1, \quad t > 0 \end{cases}$.

א. מצאו את משוואה דיפרנציאלית לפונקציה $v(x,t)$ עם תנאי שפה והתחלה אם ידוע ש $t + x + v(x,t)$ פתרון לבעייה הנתונה.

ב. נניח שהפתרון של בעיית ההתחלה שקיבלת בסעיף א הוא מהצורה $v(x,t) = \sum_{n\geq1} T_n(t)\sin(\pi nx)$. מצאו נוסחה מפורשת לפונקציה $v(x,t)$ והוכיחו ש- $u(x,t) = t + x + e^{-9\pi^2 t}\sin(3\pi x) + \frac{1}{4\pi^2}\left(1 - e^{-4\pi^2 t}\right)\sin(2\pi x)$.

שאלה 4: נתונה המשוואה $t^2y'' + ty' - y = 0$.

א. מצאו שני פתרונות בלתי תלויים לינארית למשוואה הנתונה.

ב. על סמך סעיף א' מצאו הפתרון הפרטי והכללי למשוואה $t^2y'' + ty' - y = 8t^2e^{2t}$

שאלה 5:

א. מצאו את כל הפונקציות הרציפות $f(x)$ המקיימות $\left(f(x)\right)^2 + f(x)\frac{d}{dx}f(x) = 3\int_0^x f(t)dt$ כאשר $f(0) = f'(0) = 1$.

ב. יהי $y(x)$ פתרון למשוואה $y'' + p(x)y' + 2y = 0$. נתון גם $y^2(x)$ הוא פתרון לאותה משוואה. מהי המשוואה ומהם הפתרונות שלה. מצאו כל התשובות האפשרויות.

שאלה 6: נתונה משוואה דיפרנציאלית מסדר שני מהצורה $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

א. נתון $p(x), q(x)$ רציפות בקטע $[a,b]$. הוכיחו שאם למשוואה שני פתרונות חיובים שונים בקטע זה, אז אין הם יכולים להחתך פעמיים.

ב. נניח למשוואה יש שני פתרונות $x, \sin(x)$ בקטע $(-\pi,\pi)$. הראו שהפתרונות אלו בלתי תלויים אך לא יתכן ש $p(x), q(x)$ רציפות.

בהצלחה

בחינה סופית משוואות דיפרנציאליות רגילות 210.2125

מועד: ב משך הבחינה: $2\frac{1}{2}$ שעות מרצה: פרופ' תאופיק מנסור תאריך: 8.7.2018 סמסטר: ב תשע"ח

הוראות לנבחן: (1) הבחינה מורכבת מ-6 שאלות. כל שאלה מזכה ב- 20 נקודות המתחלקות באופן שווה בין סעיפיה. יש להשיב על **5 שאלות בדיוק** אשר תשובה ללא נימוק נחשבת כשאלה ללא תשובה. (2) אין להשתמש בחומר עזר כלשהו וגם לא במחשבון. (3) נא לכתוב בעט שחור או כחול בלבד. (4) **אין להעתיק אף שאלה משאלות הבחינה רק לציין את מספרה.**

שאלה 1:

א. מצאו שני פתרונות למשוואה $y' = 2 + \sqrt{9-(y-2x-1)^2}$ המקיימת $y(0) = 4$ בתחום $-3 \le y - 2x - 1 \le 3$.
האם יש בכך סתירה למשפט הקיום והיחידות? נמקו.

ב. נתונה המשוואה $y' = \frac{2xy}{x^2+6}\sin\left(\frac{\pi y}{2(x^2+6)}\right)$. הוכיחו כי פתרון המשוואה המקיים $y(0) = 1$ גם מקיים $0 < y(x) < x^2 + 17$ בתחום הגדרתו.

שאלה 2: נתונה הבעייה $-u'' = \lambda u$ בתחום $0 < x < \pi$ כאשר $u(0) - au'(0) = u(\pi) + bu'(\pi) = 0$ עבור $a, b > 0$.

א. הוכיחו שעבור $\lambda = 0, \lambda < 0$ הפתרון הוא טרוויאלי כלומר אין פונקציות עצמיות.

ב. מצאו את הערכים העצמים ואת הפונקציות העצמיות במקרה של $\lambda = \omega^2 > 0$.

שאלה 3: נתונה בעייה הבאה:
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \cos(2\pi x) + 1, 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x,0) = x + \cos(3\pi x), \quad 0 < x < 1 \\ u(0,t) = t, u(1,t) = t + 1, \quad t > 0 \end{cases}.$$

א. מצאו בעייה מתאימה לפונקציה $v(x,t)$ כולל תנאי שפה והתחלה אם ידוע ש $t + x + v(x,t)$ פתרון לבעייה הנתונה.

ב. נניח שהפתרון של בעיית ההתחלה שקיבלת בסעיף א הוא מהצורה $v(x,t) = \sum_{n\ge1} T_n(t)\cos(\pi n x)$. מצאו נוסחה מפורשת לפונקציה $v(x,t)$.

שאלה 4:

א. מצאו משוואה לינארית, הומוגנית, מנורמלת עם מקדמים קבועים ומסדר 8 כך ש $y_2(x) = 2, y_1(x) = x\sin(x)$ הם פתרונות שלה. מצאו כל התשובות האפשרויות.

ב. מצאו משוואה לינארית, הומוגנית, מנורמלת עם מקדמים לאו דוקא קבועים ומסדר מינימאלי כך ש $y_2(x) = 2, y_1(x) = x\sin(x)$ הם פתרונות שלה. הוכיחו שיש תשובה אחת בלבד.

שאלה 5:

א. נתונה המשוואה $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ כאשר $p(x)$ פונקציה אי-זוגית ו- $q(x)$ פונקציה זוגית בקטע $[-a, a]$.
הוכיחו כי למשוואה זו יש פתרון שהוא פונקציה זוגית ופתרון אחר שהוא פונקציה אי-זוגית. לאיזה תנאי התחלה מתאים כל אחד מפתרונות אלה?

ב. נתונה המשוואה $y'' + 2xy' + 2y = 0$. פתור את המשוואה בעזרת טורי חזקות וזהה את הפתרון הזוגי על ידי פונקציות פשוטות.

שאלה 6: נתונה משוואה דיפרנציאלית מסדר שני מהצורה $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

א. נתון $p(x), q(x)$ רציפות בקטע $[a, b]$. הוכיחו שאם למשוואה שני פתרונות חיובים שונים בקטע זה, אז אין הם יכולים להחתך פעמים.

ב. נניח למשוואה יש שני פתרונות $x, \cos(x)$ בקטע $(-\pi, \pi)$. הוכיחו/הפריכו שהפתרונות אלו בלתי תלויים אך לא יתכן ש $p(x), q(x)$ רציפות.

בהצלחה

בחינה סופית משוואות דיפרנציאליות רגילות 210.2125

מועד: ג משך הבחינה: $2\frac{1}{2}$ שעות מרצה: פרופ' תאופיק מנסור תאריך: 2.9.2018 סמסטר: ב תשע"ח

הוראות לנבחן: (1) הבחינה מורכבת מ-6 שאלות. כל שאלה מזכה ב- 20 נקודות המתחלקות באופן שווה בין סעיפיה. יש להשיב על **5 שאלות בדיוק** אשר תשובה ללא נימוק נחשבת כשאלה ללא תשובה. (2) אין להשתמש בחומר עזר כלשהו וגם לא במחשבון. (3) נא לכתוב בעט שחור או כחול בלבד. (4) **אין להעתיק אף שאלה משאלות הבחינה רק לציין את מספרה.**

שאלה 1:

א. למשוואה $y' = \sin^4(\pi x)\, y^2 + y$ יש פתרון המוגדר לכל x ממשי המקיים $y(0) = y(1)$. הוכיחו כי $y(x+1) = y(x)$ לכל x ממשי.

ב. נתונה המשוואה $y' = \frac{-2xy}{x^2+16}\cos\left(\frac{\pi y}{(x^2+16)}\right)$. הוכיחו כי פתרון המשוואה המקיים $y(0) = 1$ גם מקיים $0 < y(x) < x^2 + 17$ בתחום הגדרתו.

שאלה 2: נתונה הבעייה $(xy')' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x}$ בקטע $[1, e]$ כאשר $y(1) = y(e) = 0$.

א. הראו אם λ הוא ערך עצי לא צטרוויאלי לבעייה אז הוא מקיים $\lambda > -1$.

ב. הוכיחו שהפונקציות העצמיות הם נתונות על ידי $\phi_n(x) = \sin(n\pi \ln(x))$. והערכים העצמים $\lambda_n = n^2\pi^2 - 1$ כאשר $n = 1,2,\ldots$.

שאלה 3: נתונה בעייה הבאה:
$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0, 0 \le x \le \pi, t > 0 \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, \quad t > 0 \\ u(0,x) = 8\cos(4x) - 6\cos(2x) - 10 \end{cases}.$$

א. הראו שהפונצקיות העצמיות לבעייה הם מהצורה $u_n(t,x) = e^{-n^2 t}\cos(nx)$ עבור $n = 0,1,2,\ldots$.

ב. מצאו את הפונקציה $u(t,x)$ הפותרת את הבעייה.

שאלה 4: נתונה המשוואה $y'' + 2y' + 2y = f(t)$ כאשר $y(0) = 1$ וגם $y'(0) = 0$.

א. מצאו את הפתרון הכללי למשוואה ההומוגנית $y'' + 2y' + 2y = 0$, נמקו!

ב. הוכיחו שפתרון המשוואה האי הומוגנית הוא $y(t) = e^{-t}(\cos(t) + \sin(t)) + \int_0^t e^{r-t}\sin(t-r)\, f(r)dr$.

שאלה 5: נתון שהטור מהצורה $y = \sum_{n\ge 0} a_n x^{n+s}$ פתרון למשוואה $x^2(2-x)y'' + x(1+x)y' - 3y = 0$.

א. מצאו את שתי האפשרויות של s.

ב. בעזרת סעיף א, מצאו את שתי הפתרונות.

שאלה 6: נתונה המערכת $x' = 3x(t) - 2y(t), y' = 2x(t) - 2y(t)$ כאשר $x(0) = 1, y(0) = a$.

א. פתרו את המערכת.

ב. מצאו את כל הערכים של הפרמטר a שעבורם הפתרון של בעיית ההתחלה מקיים $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

בהצלחה