

בחינה סופית: משוואות דיפרנציאליות רגילות 210.2125

מועד: א' משך הבחינה: $2\frac{1}{2}$ שעות מרצה: פרופ' תאופיק מנסור תאריך: 03.02.16 סמסטר: א' תשע"ז

הראות לנבחנים: 1. הבחינה מורכבת מ-6 שאלות ויש לפתור בדיוק 5 שאלות (יותקן 5 השאלות הראשונות). כל שאלה בעלת ערך של 20 נקודות שמתחלקות באופן שווה על סעיפיה. 2. אין להשתמש בחומר עזר כלשהו כולל מחשבון. 3. אסור להעתיק את השאלה, אך יש לציין את מספרה. 4. לכתוב בעט כחול או שחור בלבד.

שאלה 1: נתונה מערכת מד"ר $U'(t) = AU(t)$ כאשר A מטריצה קבועה עם n שורות ו- n עמודות. ידוע שהפתרון היסודי של מערכת זו הוא $U(t)$.

א. מצאו הפתרון היסודי של המערכת $Y'(t) = (A + I)Y(t)$.

ב. אם $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, מצאו הפתרון $U(t)$ ותארו התנהגות הפתרון כאשר $t \rightarrow \infty$.

שאלה 2: נתונה המד"ר $y' + (\cos t)y^2 = 0$ עם תנאי ההתחלה $y(0) = y_0$.

א. מצאו את הפתרון הכללי למד"ר.

ב. מצאו את הפתרון לבעיית ההתחלה, ומצאו עבור אילו ערכים של y_0 הפתרון הוא מוגדר על כל ציר הממשי.

שאלה 3: נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $tu_{xx} - 5u_{xt} + 7u_t = 0$

א. השתמשו בשיטת ההפרדה לקבלת פתרון כללי למשוואה הדיפרנציאלית.

ב. בעזרת סעיף א' מצאו את הפתרון למשוואה עם $u_x(0, t) = u(L, t) = 0$ כאשר $L > 0$.

שאלה 4: נתונה מערכת מדר הבאה: $\frac{dx}{dt} = 2x - y - x(3 - x^2 - y^2)$, $\frac{dy}{dt} = x + 2y - y(3 - x^2 - y^2)$.

א. כתבו את המערכת בקואורדינטות קוטביות: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

ב. פתרו את המערכת שהתקבלה בסעיף א' ואז קבלו את הפתרון למערכת הנתונה.

שאלה 5: (אין קשר בין הסעיפים)

א. המד"ר $y' = \frac{y}{x+7} + \sin\left(\frac{\pi y}{x+7}\right)$ עם $x \geq 0$ בעלת פתרון $y(x)$ המקיים תנאי $y(0) = 0$. הוכיחו כי $0 \leq y(x) < 7x + 100$.

ב. פתרו את המערכת הבאה בשיטת וריאציית פרמטרים $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x - y = e^{2t} \\ \frac{dy}{dt} + 3x - 2y = 8e^{2t} \end{cases}$

שאלה 6: (אין קשר בין הסעיפים)

א. יהי $y(x)$ פתרון למד"ר $y'' - xy' + y = e^x$ עם $y(0) = 1$. מצאו את המקדם של x^4 בפיתוח של $y(x)$ לטור חזקות סביב $x = 0$.

ב. בהינתן המד"ר $xy''' - y'' = 0$, בדקו כי הפונקציות $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$, $y_3(x) = x^3$ פותרות את המשוואה וחשבו את הוורונסקיאן בשתי דרכים.

בחינה סופית: משוואות דיפרנציאליות רגילות 210.2125

מועד: ב' משך הבחינה: $2\frac{1}{2}$ שעות מרצה: פרופ' תאופיק מנסור תאריך: 24.02.16 סמסטר: א' תשע"ז

הראות לנבחנים: 1. הבחינה מורכבת מ-6 שאלות ויש לפתור בדיוק 5 שאלות (יותקן 5 השאלות הראשונות). כל שאלה בעלת ערך של 20 נקודות שמתחלקות באופן שווה על סעיפיה. 2. אין להשתמש בחומר עזר כלשהו כולל מחשבון. 3. אסור להעתיק את השאלה, אך יש לציין את מספרה. 4. לכתוב בעט כחול או שחור בלבד.

שאלה 1: נתונה את המשוואה הדיפרנציאלית $x^2 y dx - (x^3 + y^3) dy = 0$.

א. פתרו את המשוואה.

ב. פתרו את המשוואה בשיטה נוספת, אחרת.

שאלה 2: נתונה המד"ר $y' + (\sin t)y^2 = 0$ עם תנאי ההתחלה $y(0) = y_0$.

א. מצאו את הפתרון הכללי למד"ר ואת הפתרון לבעיית ההתחלה.

ב. מצאו עבור אילו ערכים של y_0 הפתרון הוא מוגדר על כל ציר הממשי.

שאלה 3: נתונה המשוואה $6u_{xx} = u_t$ לכל $0 < x < 4, t > 0$ כאשר $u(0, t) = 20, u(4, t) = 60$ וגם

$$u(x, 0) = f(x) = 10x + 20 - \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 15 \sin(2\pi x)$$

א. נגדיר $w(x, t) = u(x, t) - 10x - 20$. הראו שהפונקציה הזאת מקיימת $6w_{xx} = w_t$ בתחום הנתון

$$w(x, t) = \sum_{n \geq 1} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right) e^{-\frac{6n^2\pi^2}{16}t}$$

ב. מצאו את המקדמים של C_n בטור של הפונקציה $w(x, t)$.

שאלה 4: נתונה מערכת מדר הבאה: $\frac{dx}{dt} = 2x - y - x(3 - x^2 - y^2), \frac{dy}{dt} = x + 2y - y(3 - x^2 - y^2)$.

א. כתבו את המערכת במשתנים r, θ כאשר $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$.

ב. פתרו את המערכת שהתקבלה בסעיף א' ואז קבלו את הפתרון למערכת הנתונה.

שאלה 5: (אין קשר בין הסעיפים)

א. לאילו ערכים של α המדר $(\alpha^2 - \alpha y) + (\alpha e^y - 2x)y' = 0$ מדויקת?

ב. מצאו את הפתרון הכללי למדר $y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\cos x}$?

שאלה 6: (אין קשר בין הסעיפים)

א. מצאו שני פתרונות בלתי תלויים y_1, y_2 בצורת טור סביב $x_0 = 0$ למשוואה $y'' - 2xy' + 2y = 0$ המקיימים

$$y_1(0) = y_2'(0) = 0, y_1'(0) = 1, y_2(0) = -1$$

ב. בהינתן המד"ר $xy''' - y'' = 0$, בדקו כי הפונקציות $y_1(x) = 1, y_2(x) = x, y_3(x) = x^3$ פותרות את המשוואה וחשבו את הוורונסקיאן.

בחינה סופית: משוואות דיפרנציאליות רגילות 210.2125

מועד: ג' משך הבחינה: $2\frac{1}{2}$ שעות מרצה: פרופ' תאופיק מנסור תאריך: 25.04.16 סמסטר: א' תשע"ז

הראות לנבחנים: 1. הבחינה מורכבת מ-6 שאלות ויש לפתור בדיוק 5 שאלות (יותר מ-5 השאלות הראשונות). כל שאלה בעלת ערך של 20 נקודות שמתחלקות באופן שווה על סעיפיה. 2. אין להשתמש בחומר עזר כלשהו כולל מחשבון. 3. אסור להעתיק את השאלה, אך יש לציין את מספרה. 4. לכתוב בעט כחול או שחור בלבד.

$$\frac{da}{dt} = -a$$

$$\frac{db}{dt} = 2a - 5b - c$$

$$\frac{dc}{dt} = 4b - c$$

א. פתרון את המערכת.

ב. האם הפתרון $(a(t), b(t), c(t))$ מתכנס לאפס כאשר הזמן שואף לאינסוף? נמקו!

שאלה 2: נתונה המדר הבאה: $(y^2 - 4)y' = x^2 + 1$

א. על פי משפט הקיום והיחידות, בדוק את קיום ויחידות פתרון בעיית ההתחלה של המדר הנתונה עם תנאי ההתחלה $y(0) = 2$.

ב. על פי משפט הקיום והיחידות, בדוק את קיום ויחידות פתרון בעיית ההתחלה של המדר הנתונה עם תנאי ההתחלה $y(0) = a > 2$.

שאלה 3: נתונה המשוואה $16u_{xx} = u_{tt}$ לכל $0 < x < 4, t > 0$ כאשר $u(0, t) = u(4, t) = u_t(x, 0) = 0$ וגם $u(x, 0) = \sqrt{5} \sin(\pi x) - 2\sqrt{7} \sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right)$

א. מצאו את הפתרון הכללי למשוואה זו.

ב. מצאו את הפתרון הפרטי שמקיים את כל תנאי ההתחלה והשפה.

שאלה 4: נתונה מערכת מדר הבאה: $\frac{dx}{dt} = 2x - y - x(3 - x^2 - y^2), \frac{dy}{dt} = x + 2y - y(3 - x^2 - y^2)$

א. בהנחה שהמשתנים x, y, r, θ הם פונקציה של זמן ומקיימים $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1 \text{ וגם } \frac{dr}{dt} = r(r^2 - 1)$$

ב. פתרו את המערכת שהתקבלה בסעיף א' ואז קבלו את הפתרון למערכת הנתונה.

שאלה 5: (אין קשר בין הסעיפים) מצאו את הפתרון הכללי למדר הבאות

$$\frac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$$

$$\frac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1)$$

שאלה 6: נתונה בעיית השפה $X'' + \lambda X = 0$ כאשר $X'(0) = X(5) = 0$

א. מצאו את כל הערכים העצמיים החיוביים ואת הפונקציות העצמיות המתאימות להם.

ב. האם 0 הוא ערך עצמי? אם כן מצאו את הפונקציה העצמית המתאימה לו.