אוניברסיטת חיפה
החוג למתמטיקה

חדו"א ב'

אוסף תרגולים

Islam Akaria
אסלאם עכריה
islam.akaria@gmail.com

אוניברסיטת חיפה
החוג למתמטיקה - חדו"א ב'
תרגול מס' 1 - אסלאם עפר'ה

האינטגרל הלא מסוים
אינטגרציה בחלקים
אינטגרציה של פונקציות רציונליות

הגדרה: תהי $f(x)$ פונקציה מוגדרת בתחום מסוים.
$F(x)$ נקראת פונקציה קדומה של $f(x)$ בתחום זה
אם מתקיים: $F'(x)=f(x)$ לכל x בתחום.

דוגמא: $F_1(x)=x^2+1$ היא פונקציה קדומה של: $f(x)=2x$, כי מתקיים:

$$F'(x)=(x^2+1)'=2x=f(x)$$

גם $F_2(x)=x^2+2$ היא פונקציה קדומה של $f(x)=2x$.

בעצם כל פונקציה מן הצורה: $F(x)=x^2+const$ היא פונקציה קדומה של $f(x)=2x$.

הגדרה: אוסף כל הפונקציות הקדומות $F(x)$ של $f(x)$ נקרא האינטגרל הלא מסוים של $f(x)$. ומסמנים:

$$\int f(x)dx=F(x)+c$$

כאשר: $\int$ סמל האינטגרציה.

$f(x)$ נקראת האינטגרנד.

x זה משתנה האינטגרציה.

דוגמא:

$$\int 2x\,dx=x^2+c$$

תכונות: מההגדרה נובע:

1. $\int f'(x)dx=f(x)+c$
2. $\int K\cdot f(x)dx=K\cdot\int f(x)dx$ (K קבוע כלשהו)
3. $\int f(x)\pm g(x)\,dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

אינטגרלים מיד"ם :

1. $\int 0\,dx = c$

2. $\int dx = x + c$

3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad (n \neq -1)$

4. $\int x^{-1} dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$

5. $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

6. $\int e^x dx = e^x + c$

7. $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

8. $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x + c$

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctg\,x + c$

11. $\int \dfrac{dx}{r^2+x^2} = \dfrac{1}{r} arctg \dfrac{x}{r} + c \qquad (\mathbb{R} \ni r > 0)$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{r} + c \qquad (\mathbb{R} \ni r > 0)$

13. $\int r^x dx = \dfrac{r^x}{\ln r} + c \qquad (\mathbb{R} \ni r > 0)$

003

תרגיל: חשב את האינטגרלים הבאים:

1. $\int 5x^3 - 10x^{-2} + 3\,dx$
2. $\int \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$
3. $\int \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\,dx$
4. $\int \frac{3x^2+2}{2x^3+4x+1}\,dx$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$
6. $\int \frac{3\,dx}{x^2+2}$
7. $\int \sin(4x)\,dx$
8. $\int \cos^2 x\,dx$

פתרון:

1. $\int 5x^3 - 10x^{-2} + 3\,dx = \frac{5}{4}x^4 + 10x^{-1} + 3x + c$

2. $\int \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{1/2} + x^{-1/2}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + c$

3. $\int \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\,dx = \ln|x| - \frac{1}{x} + c$

4. $\int \frac{3x^2+2}{2x^3+4x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x+1/2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\ln|x^3+2x+1/2| + c$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \arcsin\frac{x}{4} + c$

6. $\int \frac{3\,dx}{x^2+2} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2}} + c$

7. $\int \sin(4x)\,dx = -\frac{1}{4}\cdot\cos(4x) + c$

8. $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + c$

אינטגרציה לפי חלקים

ידוע לנו ש- $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

או בצורה אחרת:

$$f\cdot g' = (f\cdot g)' - f'\cdot g$$

מכאן:

$$(*) \quad \boxed{\int f\cdot g'\,dx = f\cdot g - \int f'\cdot g\,dx}$$

תרגיל: חשב את האינטגרלים הבאים:

1. $\int x e^x\,dx$
2. $\int \ln x\,dx$
3. $\int x^2 \ln x\,dx$
4. $\int e^{2x}\sin(4x)\,dx$

פתרון: (1) נסמן: $g(x)=e^x \qquad f(x)=x$

מכאן: $g'=e^x \qquad f'=1$

נציב ב- (*) ונקבל:

$$\int x e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

$$\int f g'\,dx = f\cdot g - \int f' g\,dx$$

2. נסמן:

$$f=\ln x \qquad g=x$$
$$f'=\frac{1}{x} \qquad g'=1$$

נציב ב- (*) ונקבל:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c$$

3. נסמן:

$$f=\ln x \qquad g=x^3$$
$$f'=\frac{1}{x} \qquad g'=3x^2$$

נציב ב- (*) ונקבל:

$$\int x^2\ln x\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^2\ln x\,dx = \frac{1}{3}\left(x^3\ln x - \int x^2dx\right)$$
$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c$$

4. נסמן:

$$f=\sin 4x \qquad g=e^{2x}$$
$$f'=4\cos 4x \qquad g'=2e^{2x}$$

$$\frac{1}{2}\int 2e^{2x}\sin(4x)\,dx = \frac{1}{2}\left(e^{2x}\sin(4x) - 4\int e^{2x}\cos 4x\,dx\right)$$

נתבונן באינטגרל:

$$-4\int e^{2x}\cos 4x\,dx$$

נסמן:

$$f=\cos 4x \qquad g=e^{2x}$$
$$f'=-4\sin 4x \qquad g'=2e^{2x}$$

נציב ב- (*) ונקבל:

$$-2\int 2e^{2x}\cos 4x\,dx = -2\left(e^{2x}\cos 4x + 4\int e^{2x}\sin 4x\,dx\right)$$

סה"כ:

$$\int e^{2x}\sin 4x\,dx = \frac{1}{2}\left(e^{2x}\sin 4x - 2e^{2x}\cos 4x - 8\int e^{2x}\sin 4x\,dx\right)$$

מכאן:

$$\int e^{x}\sin 4x\,dx = \frac{1}{10}e^{x}\sin 4x - \frac{1}{5}e^{x}\cos 4x + c$$

006

תרגיל: חשב:

1. $\int \operatorname{arctg} x \, dx$

2. $\int x^2 e^x \, dx$

3. $\int \ln^2 x \, dx$

פתרון: 1

$f = \operatorname{arctg} x \qquad g = x$

$f' = \frac{1}{1+x^2} \qquad g' = 1$

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) + c$$

2

$f = x^2 \qquad g = e^x$

$f' = 2x \qquad g' = e^x$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + \int 2e^x dx$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c$$

עוד פעם אינטגרציה בחלקים:

$f = 2x \qquad g = e^x$

$f' = 2 \qquad g' = e^x$

3

$f = \ln^2 x \qquad g = x$

$f' = \frac{2 \ln x}{x} \qquad g' = 1$

$$\int \ln^2 x \, dx = x \ln^2 x - \int 2 \ln x \, dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + \int 2 \, dx$$

$$= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + c$$

עוד פעם אינטגרציה בחלקים:

$f = \ln x \qquad g = 2x$

$f' = \frac{1}{x} \qquad g' = 2$

7

אינטגרציה של פונקציות רציונליות:

הגדרה: פונקציה רציונלית היא פונקציה מהצורה: $\frac{P(x)}{Q(x)}$
כאשר $P(x)$, $Q(x)$ פולינומים ו- $Q(x) \neq 0$!.

תרגיל: חשב:

1. $\displaystyle\int \frac{x^5+2x^3+x^2-1}{x^2+1}\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^2-1}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+4x^2+3x}$

4. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{x^2-x+1}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x^2+1)^2(x+1)}\,dx$

פתרון: 1 רואים שחזקת המונה יותר גדולה מחזקת המכנה,
נבצע חלוקת פולינומים:

008

8

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3+x+1 \\
\hline
x^2+1 & x^5+2x^3+x^2-1 \\
 & x^5+x^3 \\
\cline{2-2}
 & x^3+x^2-1 \\
 & x^3+x \\
\cline{2-2}
 & x^2-x-1 \\
 & x^2+1 \\
\cline{2-2}
 & -x-2
\end{array}
$$

קבלנו:

$$\frac{x^5+2x^3+x^2-1}{x^2+1} = x^3+x+1 - \frac{x+2}{x^2+1}$$

לכן:

$$\int \frac{x^5+2x^3+x^2-1}{x^2+1}dx = \int x^3+x+1 - \frac{x+2}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x - \int \frac{x+2}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x - \int \frac{x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\arctg x + c$$

2

$$\int \frac{x^2+2}{x^2-1}dx = \int \frac{x^2-1}{x^2-1} + \frac{3}{x^2-1}dx = \int 1 + \frac{3}{(x-1)(x+1)}dx$$

$$= x + \int \frac{3}{(x-1)(x+1)}dx$$

9

נבצע פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{3}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$= \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B)x+A-B}{(x-1)(x+1)}$$

השוואת מקדמים:

$$A+B=0$$
$$A-B=3$$

$$A=\frac{3}{2} \quad , B=-\frac{3}{2}$$

לכן:

$$\frac{3}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

נחזור לאינטגרל:

$$= x + \int \frac{3}{(x-1)(x+1)}dx = x + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}dx$$

$$= x + \frac{3}{2}\left(\ln|x-1| - \ln|x+1|\right) + c$$

$$= x + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$$

3 ברור ש-

$$x^3+4x^2+3x = x(x^2+4x+3) = x(x+1)(x+3)$$

לכן:

$$\frac{1}{x^3+4x^2+3x} = \frac{1}{x(x+1)(x+3)}$$

פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{x(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}$$

$$= \frac{A(x+1)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x+3)}$$

כלומר:

$$A(x+1)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x+1) = 1$$

נציב $x=0$ ונקבל: $A=\frac{1}{3} \Leftarrow 3A=1$

נציב $x=-1$ ונקבל: $B=-\frac{1}{2} \Leftarrow -2B=1$

נציב $x=-3$ ונקבל: $C=\frac{1}{6} \Leftarrow 6C=1$

סה"כ:

$$\int \frac{dx}{x^3+4x^2+3x} = \int \frac{x^{-1}}{3} - \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{6(x+3)}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln|x+3| + C$$

4 באופן דומה לסעיפים קודמים נעשה פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}=\frac{(A+B)x-(2A+B)}{(x-1)(x-2)}$$

$$\begin{aligned}A+B&=2\\-2A-B&=1\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}A&=-3\\B&=5\end{aligned}$$

לכן:

$$\int\frac{2x+1}{(x-1)(x-2)}dx=\int\frac{-3}{x-1}+\frac{5}{x-2}dx=-3\ln|x-1|+5\ln|x+2|+c$$

5 גם בסעיף זה נעשה פירוק לשברים חלקיים אבל נשים לב לריבוי של $x-1$ במכנה:

$$\frac{x^2-x+1}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$=\frac{A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

כלומר:

$$A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)=x^2-x+1$$

נציב $x=1$ ונקבל: $3A=1$ מכאן: $A=\frac{1}{3}$

$x=-2$ נקבל: $-3C=3$ לכן: $C=-1$

$x=0$ נקבל: $\frac{2}{3}-2B+1=1$ כלומר: $B=\frac{1}{3}$

בחזור לאינטגרל:

$$\int \frac{x^2-x+1}{(x-1)^2(x+2)}dx = \int \frac{1}{3(x-1)^2} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \frac{-1}{3(x-1)} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \ln|x+2| + c$$

(6) גם כאן נבצע פירוק לשברים חלקיים, אבל בצורה קצת שונה:

$$\frac{x-1}{(x^2+1)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{E}{x+1}$$

ע״י השוואת מקדמים נקבל:

$$x-1 = (Ax+B)(x+1) + (Cx+D)(x^2+1)(x+1) + E(x^2+1)^2$$

אחרי חישובים נקבל:

$$A=1,\ B=0,\ C=\frac{1}{2},\ D=\frac{-1}{2},\ E=\frac{-1}{2}$$

לכן:

$$\int \frac{x-1}{(x^2+1)^2(x+1)}dx = \int \frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{x-1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{4}\ln|x^2+1| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x - \ln|x+1| + c$$

1

אוניברסיטת חיפה
חדו"א ב' - תרגול מס'
אלסלאם עכריה

אינטגרל לא מסוים
- שיטת ההצבה
- אינטגרל של פונקציות טריגונומטריות

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$$

כאשר: $t = g(x)$

תרגיל: חשב את האינטגרלים הבאים:

1. $$\int \left(2 - \frac{1}{x}\right)\sin(2x - \ln x)\,dx$$

2. $$\int 7(3x^2 - 1)e^{x^3 - x}\,dx$$

3. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2 - 3x^2}}$$

פתרון: 1. נציב: $t = 2x - \ln x$

$$dt = \left(2 - \frac{1}{x}\right)dx \Longleftarrow \quad t' = \frac{dt}{dx} = 2 - \frac{1}{x}$$

נציב את זה באינטגרל ונקבל:

$$\int \underbrace{\sin(2x - \ln x)}_{\sin t} \cdot \underbrace{\left(2 - \frac{1}{x}\right)dx}_{dt} = \int \sin(t)\,dt = -\cos(t) + c$$

$$= -\cos(2x - \ln x) + c$$

014

(2)

2. נציב באינטגרל: $t = x^3 - x$

$dt = (3x^2-1)dx$ ונקבל:

$$\int 7(3x^2-1)e^{x^3-x}\,dx = \int 7e^t\,dt = 7e^t + c = 7e^{x^3-x} + c$$

3. נציב באינטגרל: $t = 2-3x^2$

$dt = -6x\,dx$ ונקבל:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2-3x^2}} = -\frac{1}{6}\int \frac{-6x\,dx}{\sqrt{2-3x^2}} = -\frac{1}{6}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{3}\cdot\sqrt{t} + c$$

$$= -\frac{\sqrt{2-3x^2}}{3} + c$$

תרגיל: חשב את האינטגרלים:

1. $\int \frac{(\ln x)^\alpha}{x}\,dx \quad , \alpha \in \mathbb{R}$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[5]{x})}$ 3. $\int x^2 \cdot \sqrt[3]{2x+1}\,dx$

פתרון: 1. נציב באינטגרל: $t = \ln x$

$dt = \frac{dx}{x}$ ונקבל:

$$\int \frac{(\ln x)^\alpha}{x}\,dx = \int t^\alpha\,dt = \begin{cases} \ln(t) + c = \ln(\ln x) + c, & \alpha = -1 \\ \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c = (\ln x)^{\alpha+1}/_{\alpha+1}, & \alpha \neq -1 \end{cases}$$

(3)

2. נציב: $t^{10}=x$

ונקבל: $10t^9\,dt=dx$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[5]{x}\right)}=\int\frac{10t^9\,dt}{t^5(1+t^2)}=\int\frac{10t^4\,dt}{1+t^2}=10\int t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$\begin{array}{r|l} t^2-1 & \\ \hline t^4 & 1+t^2 \\ t^4+t^2 & \\ \hline -t^2 & \\ -t^2-1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$=10\left(\frac{t^3}{3}-t+\operatorname{arctg} t\right)+c=10\left(x^{3/10}-x^{1/10}+\operatorname{arctg}x^{1/10}\right)+c$$

3. נציב: $t^3=2x+1$ לכן: $x=\frac{1}{2}(t^3-1)$

ונקבל: $dx=\frac{3t^2}{2}dt$

$$\int x^2\sqrt[3]{2x+1}\,dx=\frac{1}{4}\int(t^3-1)^2\cdot t\cdot\frac{3}{2}t^2\,dt=\frac{3}{8}\int(t^6-2t^3+1)t^3\,dt$$

$$=\frac{3}{8}\int(t^9-2t^6+t^3)\,dt=\frac{3}{8}\left(\frac{t^{10}}{10}-\frac{2t^7}{7}+\frac{t^4}{4}\right)+c$$

$$=\frac{3}{8}\left(\frac{(2x+1)^{\frac{10}{3}}}{10}-\frac{2(2x+1)^{7/3}}{7}+\frac{(2x+1)^{4/3}}{4}\right)+c$$

הערה: אינטגרלים מן הצורה: $\int x^n \cdot \sqrt[m]{ax+b}\, dx$, $(n,m\in\mathbb{Z})$

ההצבה המתאימה היא:

$t^m = ax+b$ או: $x = \frac{t^m - b}{a}$

$$dx = \frac{m t^{m-1}}{a} dt$$

תרגיל: חשב את האינטגרלים הבאים:

1. $\int \frac{(\sqrt{x+1}-1)dx}{x-\sqrt{x+1}}$

2. $\int x^5 \sqrt{4+x^2}\, dx$

פתרון: נציב: $t^2 = x+1$ כלומר: $x = t^2-1$

ולכן $dx = 2t\,dt$ נקבל:

$$\int \frac{t-1}{t^2-t-1}\cdot 2t\,dt = \int \frac{2t^2-2t}{t^2-t-1}dt = \int 2 + \frac{2}{t^2-t-1}dt$$

5

$$t^2 - t - 1 = (t - t_1)(t - t_2)$$

$$t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{2}{(t-t_1)(t-t_2)} = \frac{A}{t-t_1} + \frac{B}{t-t_2}$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ -t_2 A - t_1 B = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -B \\ (t_2 - t_1)B = 2 \\ -\sqrt{5}\,B = 2 \\ B = \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ A = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array}$$

נחזור לאינטגרל :

$$\int 2 + \frac{2}{t^2 - t - 1}\,dt = 2t + \int \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{t-t_1} - \frac{1}{t-t_2}\right)dt$$

$$= 2t + \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\ln\left|\frac{t-t_1}{t-t_2}\right|\right) + c$$

$$= 2\cdot\sqrt{x+1} + \frac{2}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{x+1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{x+1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right| + c$$

2. נציב $t^2=4+x^2$ כלומר: $x=\sqrt{t^2-4}$

ולכן: $dx=\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-4}}$ ונקבל:

$$\int (t^2-4)^2\sqrt{t^2-4}\cdot t\cdot\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-4}}=\int t^2(t^2-4)^2\,dt$$

$$=\int t^2(t^4-8t^2+16)\,dt=\int t^6-8t^4+16t^2\,dt$$

$$=\frac{t^7}{7}-\frac{8}{5}t^5+\frac{16}{3}t^3+C$$

$$=\frac{(4+x^2)^{7/2}}{7}-\frac{8}{5}(4+x^2)^{5/2}+\frac{16}{3}(4+x^2)^{3/2}+C$$

הערה: ⊛ אינטגרל מן הצורה: $\int F\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$, $(n\in\mathbb{Z})$

ההצבה המתאימה היא: $t^n=\frac{ax+b}{cx+d}$ או $x=\frac{dt^n-b}{a-ct^n}$

⊛ $\int x^{2n+1}\sqrt{a^2\pm x^2}\,dx$, $(n\in\mathbb{Z})$ מציבים: $t^2=a^2\pm x^2$

⊛ $\int x^{2n}\cdot\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ הצבה: $x=a\sin t$

⊛ $\int x^{2n}\sqrt{a^2+x^2}\,dx$ הצבה: $x=a\,tg\,t$

⊛ $\int x^{2n}\sqrt{x^2-a^2}\,dx$ הצבה: $x=\frac{a}{\sin t}$

7

אינטגרל של פונקציות טריגונומטריות

תרגיל: חשב:

$$\int \sin(5x)\cos(7x)\,dx$$

פתרון: נשתמש בזיהוי:

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$

ונקבל:

$$\int \sin(5x)\cos(7x)\,dx = \int \frac{\sin(12x)+\sin(-2x)}{2}\,dx$$

$$= \frac{-\cos(12x)}{24} + \frac{\cos(2x)}{4} + c$$

הערה: אינטגרלים מן הצורות:

$$\int \sin(ax)\sin(bx)\,dx \quad , \quad \int \sin(ax)\cos(bx)\,dx \quad , \quad \int \cos(ax)\cos(bx)\,dx$$

משתמשים בזהויות טריגונומטריות הבאות:

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$
$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$$
$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$$

תרגיל: חשב:

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$$

פתרון: נציב:

$$t = \cos x$$
$$dt = -\sin x \, dx$$

ונקבל:

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x \, dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \sin x \, dx$$

$$= -\int (1-t^2)t^2 \, dt = -\int (t^2 - t^4)\, dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + c$$

$$= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

הערה: אינטגרל מן הצורה:

$$\int \sin^m x \cos^n dx$$

כאשר n, m שלמים ולפחות אחד מהם אי-זוגי. אזי ההצבה המתאימה:

אם m אי-זוגי: $t = \cos x$

ואם n אי-זוגי: $t = \sin x$

תרגיל: חשב:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$$

פתרון:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int (\sin x \cos x)^2 dx = \int \frac{\sin^2 2x}{4} dx$$

$$= \int \frac{1-\cos 4x}{8} dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + c$$

הערה: אינטגרל מן הצורה: $\int \sin^{2m}x\cos^{2n}x\,dx$

כאשר m, n שלמים אי-שליליים. משתמשים בזהויות הטריגונומטריות הבאות:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$2\sin^2 x = 1-\cos 2x$$

$$2\cos^2 x = 1+\cos 2x$$

אינטגרל מן הצורה: $\int F(\sin x,\cos x)\,dx$

כאשר F היא פונקציה רציונלית משני משתנים.

ההצבה המתאימה היא:

$$t = tg\frac{x}{2}$$

וע"י זהויות טריגונומטריות מקבלים:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\ ,\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\quad tg x = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$x = 2\,arctg\,t\ ,\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

022

10

תרגיל: חשב:

$$\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$$

פתרון: נשתמש בהצבה:

$$t = tg\,\frac{x}{2}$$

מהנוסחאות הקודמות נקבל:

$$\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{4t}{1+t^2}+3} = \int \frac{dt}{t^2+2t+2}$$

$$= \int \frac{dt}{(t+1)^2+1} = arctg(t+1)+c$$

$$= arctg\left(1+tg\,\frac{x}{2}\right)+c$$

023

אוניברסיטת חיפה
חדו"א ב' - תרגול מס'
אסלאם עכריה

האינטגרל המסוים
- הגדרות ותכונות.
- סכומי רימן וסכומי דרבו.
- הקשר בין אינטגרל מסוים לאינטגרל לא מסוים

__הגדרה:__ תהי $f(x)$ פונקציה מוגדרת בקטע: $[a,b]$. נחלק את הקטע $[a,b]$ ל-n תתי-קטעים באופן הבא: $[x_{i-1},x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i=1,2,\dots,n$. מכל תת-קטע נבחר נקודה x_i^*, ונגדיר את האינטגרל המסוים של $f(x)$ מהנקודה a עד לנקודה b להיות:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

__דוגמא:__ חשב את האינטגרל (לפי הגדרה):

$$\int_0^1 x\,dx$$

__פתרון:__ נחלק את הקטע: $[0,1]$ ל-n תתי-קטעים באופן הבא:

$$\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right] \quad , \quad i=1,\dots,n$$

ברור כי:

$$\forall i : \quad \Delta x_i = \frac{i}{n}-\frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}$$

כעת נחשב את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i^* \cdot \frac{1}{n}$$

ברור כי:

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i-1}{n}\cdot\frac{1}{n}}_{\underline{L}} \leqslant \underbrace{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i^* \frac{1}{n}}_{L} \leqslant \underbrace{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}}_{\overline{L}}$$

נחשב שני הגבולות $\overline{L}$, $\underline{L}$:

$$\overline{L} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{2}(1+n)\right) = \frac{1}{2}$$ (סכום סדרה חשבונית)←

מצד שני:

$$\underline{L} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(0+1+\cdots+n-1)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{2}(n-1)\right) = \frac{1}{2}$$

כלומר: $\int_0^1 x\,dx = 1/2$

תרגיל: חשב את האינטגרל: $\int_0^2 x^2+1\, dx$

פתרון: נחלק את הקטע $[0,2]$ לתתי-קטעים באופן הבא:

$$\left[0,\frac{2}{n}\right],\left[\frac{2}{n},\frac{4}{n}\right],\left[\frac{4}{n},\frac{6}{n}\right],\dots,\left[\frac{2(i-1)}{n},\frac{2i}{n}\right],\dots,\left[\frac{2(n-1)}{n},2\right]$$

ברור ש- $\Delta x_i = \frac{2}{n}$

נבחר את הנקודה $x_i^* = \frac{2i}{n}$.

נחשב את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\cdot\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{8i^2}{n^3} + \sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \frac{1}{n}\cdot 2n \Leftarrow$$ (קל לבדוק שוויון זה באינדוקציה)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} + 2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{14n^2+12n+4}{3n^2} = \frac{14}{3}$$

כלומר:

$$\int_0^2 x^2+1\, dx = \frac{14}{3}$$

תכונות של אינטגרל מסוים:

1. $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2. $$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3. $$\int_a^b c f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \quad , \; c \in \mathbb{R}$$

4. $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad , \; c \in [a,b]$$

5. $$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

6. $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy$$

* נראה עוד תכונות בהמשך !!

סכומי רימן וסכומי דרבו :

הגדרה: תהי פונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $[a,b]$.
עבור חלוקה T כלשהי לקטע $[a,b]$:

$$T: \quad [x_{i-1}, x_i] \quad i = 1,2,\dots,n$$

נסמן: $\Delta(T) = \max\{\Delta x_i : i=1,2,\dots,n\}$ (הפרמטר של חלוקה T)

הסכום :

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$ נקרא הסכום האינטגרלי של רימן.

והפונקציה $f(x)$ נקראת אינטגרבילית (לפי רימן) בקטע $[a,b]$
אם קיים הגבול :

$$L = \lim_{\Delta(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

ומסמנים :

$$L = \int_a^b f(x)\,dx$$

עבור אותה חלוקה T נסמן :

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

אזי הסכום:

$\underline{L}(\tau)=\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ נקרא סכום דרבו תחתון של τ.

$\overline{L}(\tau)=\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ נקרא סכום דרבו עליון של τ.

ואם מתקיים:

$$\lim_{\Delta(\tau)\to 0} \underline{L} = \lim_{\Delta(\tau)\to 0} \overline{L} = L$$

אזי:

$$\int_a^b f(x)dx = L$$

*הערה: אם $\lim_{\Delta(\tau)\to 0} \underline{L} \neq \lim_{\Delta(\tau)\to 0} \overline{L}$ אזי האינטגרל אינו קיים

תרגיל: הוכח כי: $f(x)=\begin{cases} 1 & x\in\mathbb{Q} \\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ אינה אינטגרבילית בכל

קטע $[a,b]$.

פתרון: נגדיר חלוקה τ באופן הבא:

$$\tau:=\{[x_{i-1},x_i],\ i=1,\dots,n\}$$

ברור כי:

$$\forall i \qquad M_i=1 \quad , \quad m_i=0$$

ולכן:

$$\lim_{\Delta(\tau)\to 0} \underline{L} = 0 \neq b-a = \lim_{\Delta(\tau)\to 0} \overline{L}$$

כלומר: $f(x)$ אינה אינטגרבילית בכל קטע $[a,b]$.

עוד תכונות של אינטגרל מסוים:

1. $$\int_a^b c\,dx = c(b-a) \quad , \quad c\in\mathbb{R}$$

2. אם $0\le f(x)$ לכל $x\in[a,b]$ אזי: $$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

3. אם $g(x)\le f(x)$ לכל $x\in[a,b]$ אזי: $$\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)dx$$

4. אם $m\le f(x)\le M$ לכל $x\in[a,b]$ אזי: $$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$$

5. $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

תרגיל: הוכח את האי-שוויון הבא:

$$2e^4 \le \int_2^4 e^{x^2}dx \le 2e^{16}$$

פתרון: ברור כי: $e^4 \le e^{x^2} \le e^{16}$ לכל $x\in[2,4]$

לכן לפי תכונה מס' 4: $$2e^4 \le \int_2^4 e^{x^2}dx \le 2e^{16}$$

הקשר בין האינטגרל המסוים לאינטגרל הלא מסוים

משפט: (ערך הממוצע האינטגרלי)

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$. אזי קיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך ש-:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}=f(c)$$

משפט: (המשפט היסודי של החדו"א)

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע (a,b). ותהי c נקודה בקטע (a,b) אזי:

$$F(x)=\int_c^x f(t)dt$$

היא פונקציה קדומה של $f(x)$ בקטע (a,b).

משפט: (ניוטון לייבניץ) תהי $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ ותהי $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$, אזי: $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

תרגיל: חשב:

1. $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin x \, dx$

2. $\int_1^{e} \frac{dx}{x}$

פתרון:

.1

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} = -\cos\frac{3\pi}{2} + \cos 0$$

$$= 0 + 1 = 1$$

.2

$$\int_1^{e} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{e} = \ln e - \ln 1 = 1$$

מסקנה: (ממשפטים קודמים) אם $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע (a,b)
ואם c נקודה כלשהי בקטע אזי:

$$\frac{d}{dx}\int_c^{x} f(t)\,dt = f(x)$$

תרגיל: חשב את הגבול :

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x)\cdot\int_0^x \frac{\sin 2t}{2t}\,dt$$

פתרון:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x)\int_0^x \frac{\sin 2t}{2t}\,dt$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x \frac{\sin 2t}{2t}\,dt}{\frac{1}{\ln(x)}} \overset{\text{לופיטל } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\sin 2t}{2t}\,dt}{\frac{d}{dx}\frac{1}{\ln(x)}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{-1}{x\ln^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} -x\ln^2 x$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-2\ln x}{x}}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -2x = 0$$

תרגיל: הוכח או הפרך:

1. לפונקציה: $y=\int_1^x \frac{\cos(t^2)}{\sqrt{t}}dt$ יש מינימום בנקודה $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2. הפונקציה $y=\int_1^x \frac{e^t}{t}dt$ מקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית:

$$-x\cdot y'-x^2y''+xe^x=0$$

פתרון: 1. נחשב נגזרת:

$$y'=\frac{\cos x^2}{\sqrt{x}}=0$$

$$\cos x^2=0$$

$$x^2=\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$$

כלומר הנגזרת אינה מתאפסת בנקודה $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, לכן הטענה אינה נכונה.

2. נחשב נגזרת: $y'=\frac{e^x}{x}$, $y''=\frac{xe^x-e^x}{x^2}$

נציב במשוואה ונקבל:

$$-e^x-xe^x+e^x+xe^x=0$$

כלומר הטענה נכונה.

1

אוניברסיטת חיפה
חדו"א ב' - תרגול מס'
אסלאם עכריה

האינטגרל המסוים
+ אינטגרציה בחלקים
+ שיטת ההצבה

אינטגרציה בחלקים:

$$\int_a^b f\cdot g'\,dx = f\cdot g\Big|_a^b - \int_a^b f'\cdot g\,dx$$

או בצורה אחרת:

$$\int_a^b f\,dg = f\cdot g\Big|_a^b - \int_a^b g\,df$$

תרגיל: חשב את האינטגרלים הבאים:

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} (3x+5)\cos\left(\frac{x}{4}\right)dx$

2. $\displaystyle\int_0^{1} \operatorname{arctg} x\, dx$

3. $\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{3}} x^5\cdot\sqrt{x^3+1}\, dx$

4. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\theta}\cos\theta\, d\theta$

035

(2)

17.10

1. $$\int_0^{2\pi} (3x+5)\cos\left(\frac{x}{4}\right)dx =$$

$$f = 3x+5 \qquad dg = \cos\frac{x}{4}\,dx$$
$$df = 3dx \qquad g = 4\sin\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$= 4(3x+5)\sin\frac{x}{4}\Big|_0^{2\pi} - 12\int_0^{2\pi}\sin\frac{x}{4}\,dx = 4(3x+5)\sin\frac{x}{4} + 48\cos\frac{x}{4}\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 4(3\cdot 2\pi+5)\sin\frac{\pi}{2} + 48\cos\frac{\pi}{2} - \left[4(3\cdot 0+5)\sin 0 + 48\cos 0\right]$$

$$= 24\pi + 20 - 48 = 24\pi - 28$$

---

2. $$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = \int_0^1 1\cdot\operatorname{arctg} x\,dx$$

$$f = \operatorname{arctg} x \qquad dg = dx$$
$$df = \frac{dx}{1+x^2} \qquad g = x$$

$$= x\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}\Big|_0^1$$

$$= \operatorname{arctg} 1 - \frac{\ln 2}{2}$$

036

3

3. $$\int_0^{\sqrt[3]{3}} x^5 \cdot \sqrt{x^3+1}\,dx = \int_0^{\sqrt[3]{3}} x^3 \cdot x^2 \cdot \sqrt{x^3+1}\,dx$$

$$f = x^3 \qquad dg = x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$$
$$df = 3x^2dx \qquad g = \frac{2}{9}(x^3+1)^{3/2}$$

$$= \frac{2}{9}x^3(x^3+1)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt[3]{3}} - \frac{2}{3}\int_0^{\sqrt[3]{3}} x^2(x^3+1)^{3/2}dx$$

$$= \frac{2}{9}x^3(x^3+1)^{3/2} - \frac{4}{45}(x^3+1)^{5/2}\Big|_0^{\sqrt[3]{3}} = \frac{2}{9}\cdot 3\,(3+1)^{3/2} - \frac{4}{45}(3+1)^{5/2} + \frac{4}{45}$$

$$-$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{124}{45} = \frac{116}{45}$$

---

4. $$\int_{\pi/2}^{\pi} e^{\theta}\cos\theta\,d\theta = .$$

$$f = \cos\theta \qquad dg = e^{\theta}d\theta$$
$$df = -\sin\theta\,d\theta \qquad g = e^{\theta}$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} e^{\theta}\cos\theta\, d\theta = e^{\theta}\cos\theta\Big|_{\pi/2}^{\pi} + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{\theta}\sin\theta\, d\theta$$

עוד פעם אינטגרציה בחלקים:

$f = \sin\theta \qquad dg\, e^{\theta} d\theta$

$df = \cos\theta\, d\theta \qquad g = e^{\theta}$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} e^{\theta}\cos\theta\, d\theta = e^{\theta}\cos\theta + e^{\theta}\sin\theta\Big|_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi} e^{\theta}\cos\theta\, d\theta$$

סה"כ:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} e^{\theta}\cos\theta\, d\theta = \frac{e^{\theta}}{2}(\cos\theta + \sin\theta)\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{-e^{\pi}}{2} - \frac{e^{\pi/2}}{2}$$

<u>שיטת ההצבה:</u>

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g)\, dg$$

כאשר:

$g(a) = \alpha$

$g(b) = \beta$

5

תרגיל: חשב את האינטגרלים:

1. $\int_{0}^{\pi/2} \sin^6 x \cos^3 x \, dx$

2. $\int_{2/5}^{4/5} \frac{\sqrt{25x^2-4}}{x} \, dx$

3. $\int_{0}^{1/6} \frac{x^5}{(36x^2+1)^{3/2}} \, dx$

4. $\int_{4}^{8} \frac{x}{\sqrt{2x^2-4x-7}} \, dx$

5. $\int_{0}^{1/2} e^{4x} \cdot \sqrt{1+e^{2x}} \, dx$

6. $\int_{-5}^{11} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x-3}} \, dx$

פתרון:

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^3 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^2 x \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x (1-\sin^2 x) \cos x \, dx$$

נציב: $t = \sin x$ ונקבל:

$dt = \cos x \, dx$

$$= \int_{\sin 0 = 0}^{\sin\frac{\pi}{2} = 1} t^6(1-t^2)\, dt = \int_0^1 t^6 - t^8 \, dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^9}{9}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{7} - \frac{1}{9} = \frac{9-7}{63} = \frac{2}{63}$$

---

2. $$\int_{\frac{2}{5}}^{\frac{4}{5}} \frac{\sqrt{25x^2-4}}{x} \, dx$$

* הפעם נשתמש בשיטת ההצבה אבל לא נחליף את הגבולות. ואחרי שנקבל תשובה נחזיר את הכל למשתנה x ואז נשתמש באותם גבולות שמופיעים באינטגרל.

נציב: $x = \frac{2}{5\cos\theta}$

$dx = \frac{2\,tg\,\theta}{5\cos\theta} d\theta$

ונקבל:

$$\sqrt{25x^2-4} = \sqrt{25 \cdot \frac{4}{25\cos^2\theta} - 4} = \sqrt{4\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right)}$$

$$= 2\sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}} = 2\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} = 2|tg\,\theta|$$

לכן:

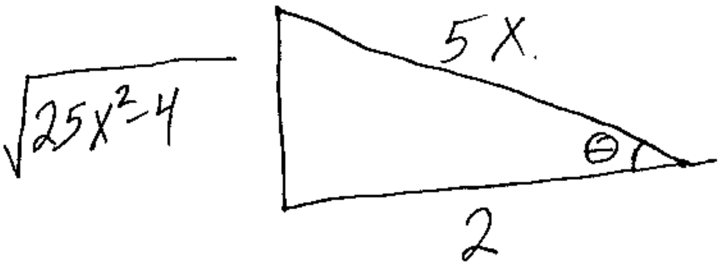
$$\int_{\frac{2}{5}}^{\frac{4}{5}} \frac{\sqrt{25x^2-4}}{x}dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2tg\,\theta}{\frac{2}{5\cos\theta}} \cdot \left(\frac{2tg\,\theta}{5\cos\theta}\right) d\theta$$

$$= 2\int_{\alpha}^{\beta} tg^2\theta\, d\theta = 2\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$= 2\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 \, d\theta = 2(tg\,\theta - \theta)\Big|_{\alpha}^{\beta}$$

כעת נחזיר את האינטגרל ל-x, לצורך כך נשתמש בזווית המשולש:

נגדיר:



אם $\cos\theta = \frac{2}{5X}$

אז: $\frac{1}{\cos\theta} = \frac{5X}{2}$

מכאן: $tg\,\theta = \frac{\sqrt{25x^2-4}}{2}$, $\theta = \arccos\frac{2}{5X}$

נחזור לאינטגרל:

$$= 2(tg\theta - \theta)\Big|_{\alpha}^{\beta} = 2\left(\frac{\sqrt{25x^2-4}}{2} - \arccos\frac{2}{5x}\right)\Bigg|_{\frac{2}{5}}^{\frac{4}{5}}$$

$$= \sqrt{25\cdot\frac{16}{25}-4} - 2\arccos\frac{1}{2} - 0 + 2\arccos 1$$

$$= \sqrt{12} - \frac{2\pi}{3}$$

$$\boxed{\text{לתזכורת: } \sqrt{b^2x^2-a^2} \Longrightarrow x = \frac{a}{b\cos\theta}}$$

---

3. $$\int_0^{1/6} \frac{x^5}{(36x^2+1)^{3/2}}\,dx$$

נציב:

$$x = \frac{tg\theta}{6}$$

$$dx = \frac{d\theta}{6\cos^2\theta}$$

מכאן:

$$(36x^2+1)^{3/2} = \left(\sqrt{36x^2+1}\right)^3 = (tg^2\theta+1)^3 = \left(\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}}\right)^3$$

$$= \left|\frac{1}{\cos\theta}\right|^3$$

$$x = 0 \Rightarrow 0 = \frac{tg\theta}{6} \Rightarrow \theta = 0$$

$$x = 1/6 \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{tg\theta}{6} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

042

9

נחזור לאינטגרל אחרי הצבה:

$$\int_0^{1/6}\frac{x^5\,dx}{(36x^2+1)^{3/2}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{tg^5\theta}{7776}}{\frac{1}{\cos^3\theta}}\left(\frac{1}{6\cos^2\theta}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{46656}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{tg^5\theta}{\frac{1}{\cos\theta}}d\theta=\frac{1}{46656}\int_0^{\frac{\pi}{4}}tg^5\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{46656}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^5\theta}{\cos^4\theta}d\theta=\frac{1}{46656}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\cos^2\theta)^2}{\cos^4\theta}\sin\theta\,d\theta$$

נציב:

$$u=\cos\theta \qquad \theta=0\Rightarrow u=\cos 0=1$$

$$du=-\sin\theta\,d\theta \qquad \theta=\frac{\pi}{4}\Rightarrow u=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

נקבל:

$$\int_0^{1/6}\frac{x^5\,dx}{(36x^2+1)^{3/2}}=-\frac{1}{46656}\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}u^{-4}-2u^{-2}+1\,du$$

$$=-\frac{1}{46656}\left(-\frac{1}{3u^3}+\frac{2}{u}+u\right)\Bigg|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{17496}-\frac{11\sqrt{2}}{279936}$$

$$\boxed{\text{תזכורת: } x=\frac{a}{b}tg\theta \Leftarrow \sqrt{a^2+b^2x^2}}$$

4. $$\int_4^8 \frac{x \, dx}{\sqrt{2x^2-4x-7}}$$

* גם בתרגיל זה לא נשנה את הגבולות, ונחזיר אותם אחרי חישוב האינטגרל.

נעשה השלמה לריבוע:

$$2x^2-4x-7 = 2\left(x^2-2x-\frac{7}{2}\right) = 2\left((x-1)^2-\frac{9}{2}\right) = 2(x-1)^2-9$$

לכן:

$$\sqrt{2x^2-4x-7} = \sqrt{2(x-1)^2-9}$$

נציב:

$$x-1 = \frac{3}{\sqrt{2}\cos\theta}$$

$$dx = \frac{3\,tg\theta}{\sqrt{2}\cos\theta}\,d\theta$$

ונקבל:

$$\int_4^8 \frac{x}{\sqrt{2x^2-4x-7}}\,dx = \int_\alpha^\beta \frac{1+\frac{3}{\sqrt{2}\cos\theta}}{\sqrt{\frac{9}{\cos^2\theta}-9}}\left(\frac{3\,tg\theta}{\sqrt{2}\cos\theta}\right)d\theta$$

$\leftarrow 3tg\theta$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta} + \frac{3}{2\cos^2\theta}\,d\theta$$

(11)

$$\int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \int \frac{\frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{1}{\cos\theta}+tg\theta\right)}{\frac{1}{\cos\theta}+tg\theta}\,d\theta$$

$$u = \frac{1}{\cos\theta} + tg\theta$$

$$du = \left(\frac{tg\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln\left|\frac{1}{\cos\theta} + tg\theta\right|$$

$$\int \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = tg\theta$$

סה"כ:

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta} + \frac{3}{2\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{\cos\theta}+tg\theta\right| + \frac{3}{2}tg\theta\Big|_\alpha^\beta$$

ידוע ש- $x - 1 = \frac{3}{\sqrt{2}\cos\theta}$

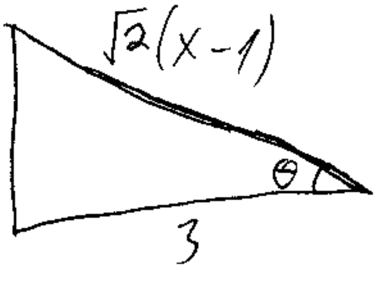
לכן: $\frac{1}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{2}}{3}(x-1)$

נמצא את $tg\theta$:

$\sqrt{2(x-1)^2-9}$

או

$\sqrt{2x^2-4x-7}$



$$tg\theta = \frac{\sqrt{2x^2-4x-7}}{3}$$

נחזור לאינטגרל:

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left| \frac{\sqrt{2}}{3}(x-1) + \frac{\sqrt{2x^2-4x-7}}{3} \right| + \frac{\sqrt{2x^2-4x-7}}{2} \Bigg|_4^8$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\sqrt{2}+1\right| + \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left| \frac{\sqrt{2}\cdot 7}{3} + \frac{79}{3} \right| + \frac{79}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{3(1+\sqrt{2})}{79+7\sqrt{2}} \right) - 38$$

---

5. $$\int_0^{1/2} e^{4x} \cdot \sqrt{1+e^{2x}}\, dx$$

נציב:

$$e^x = tg\theta$$
$$e^x dx = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

מכאן:

$$\sqrt{1+e^{2x}} = \sqrt{1+tg^2\theta} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}} = \left|\frac{1}{\cos\theta}\right|$$

לכן:

$$\int_0^{1/2} e^{4x}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx = \int e^{3x}\cdot e^x \sqrt{1+e^{2x}}\,dx = \int_\alpha^\beta \frac{tg^3\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \int_\alpha^\beta \left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right)\frac{tg\theta}{\cos^3\theta}\, d\theta$$

נציב: $u = \frac{1}{\cos\theta}$

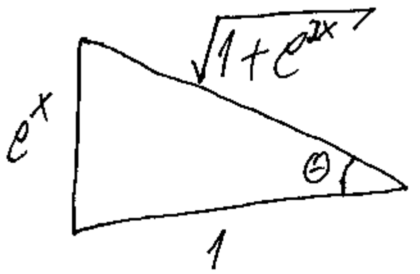
ונקבל: $du = \frac{tg\theta}{\cos\theta}$

$$\int \left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right)\frac{tg\theta}{\cos^3\theta}\,d\theta = \int u^4 - u^2\,du$$

$$= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} = \frac{1}{5\cos^5\theta} - \frac{1}{3\cos^3\theta}\Bigg|_{\alpha}^{\beta}$$

כעת נחזיר את התשובה הסופית ל- x:

ידוע ש- $e^x = tg\theta$:



לכן: $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

כלומר: $\frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{1+e^{2x}}$

נחזור לאינטגרל:

$$\frac{1}{5\cos^5\theta} - \frac{1}{3\cos^3\theta}\Bigg|_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{5}\left(1+e^{2x}\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}\left(1+e^{2x}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{0}^{1/2}$$

$$= \frac{1}{5}(1+e)^{5/2} - \frac{1}{3}(1+e)^{3/2} - \left(\frac{2^{5/2}}{5} - \frac{2^{3/2}}{3}\right)$$

047

14

6. $\displaystyle\int_{-5}^{11} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x-3}}\,dx$

נציב:

$u = \sqrt[3]{x-3}$

ונקבל:

$x = u^3 + 3$

$dx = 3u^2\,du$

$x = 11 \Rightarrow u = 2$

$x = -5 \Rightarrow u = -2$

$$\int_{-5}^{11} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x-3}}\,dx = \int_{-2}^{2} \frac{u^3+3\ +2}{u} \cdot 3u^2\,du$$

$$= \int_{-2}^{2} 3u^4 + 15u\,du = \frac{3}{5}u^5 + \frac{15}{2}u^2 \Big|_{-2}^{2}$$

$$= \frac{3 \cdot 2^5}{5} + \frac{15 \cdot 2^2}{2} - \left(\frac{3\,(-2)^5}{5} + \frac{15}{2} \cdot (-2)^2\right)$$

$$= \frac{3 \cdot 2^6}{5}$$

אוניברסיטת חיפה
חדו"א ב' - תרגול מס'
אסלאם עכריה

שימושים באינטגרל מסוים
+ חישוב גבולות
+ חישוב שטח
תרגילים ממבחנים קודמים

1. חישוב גבולות: תרגיל: חשב את הגבול: $\lim_{n\to\infty} a_n$ כאשר:

1. $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$

2. $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$

3. $a_n = n\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}\right)$

4. $a_n = \frac{1}{\sqrt{16n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{16n^2-2^2}} + \frac{1}{\sqrt{16n^2-3^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{16n^2-n^2}}$

פתרון:

1. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots \frac{n}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

שוויון כי מקבלים ע"י חלוקת הקטע $[0,1]$ ל- n תתי-קטעים
$\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$: $i=1,\dots,n$ ובחירת $f(x_i^*) = x_i^* = \frac{i}{n}$.

נשים לב ש- $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ לכל $1 \le i \le n$.

2. $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

באופן דומה לתרגיל קודם, נבחר בקטע $[0,1]$: $X_i^*=\frac{i}{n}$ כאשר: $f(x)=\frac{1}{1+X}$, $\Delta x_i=\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1\frac{dx}{1+X} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2$$

---

3. $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{(1+\frac{n}{n})^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{i}{n})^2}\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1\frac{dX}{(1+X)^2} = \frac{-1}{1+X}\Bigg|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$$

---

4. $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{16n^2-1^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{16n^2-n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{16-(\frac{1}{n})^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{16-(\frac{n}{n})^2}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{16-\left(\frac{i}{n}\right)^2}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \arcsin\frac{x}{4}\Big|_0^1$$

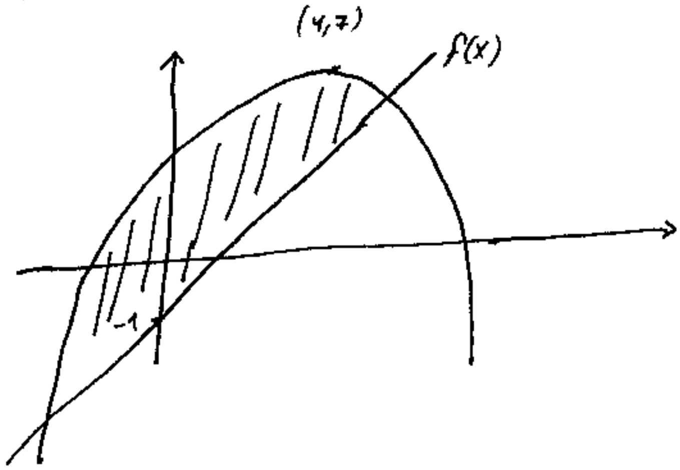
$$= \arcsin\frac{1}{4}$$

---

2. שטח של תחום מישורי:

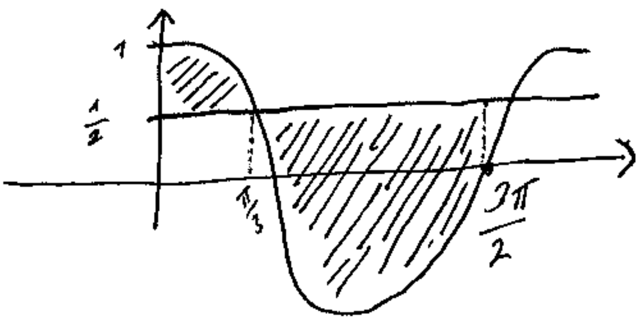
<u>תרגיל</u>: חשב את השטח התחום בין שתי הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ כאשר:

1. $f(x) = 2x-1 \quad , \quad g(x) = -x^2+8x-9$



2. $f(x) = \cos x \quad , \quad g(x) = \frac{1}{2}$

בקטע: $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$



פתרון: נמצא את נקודות החיתוך של שתי הפונקציות:

$$2x-1=-x^2+8x-9$$

$$x^2-6x+8=0$$

$$(x-2)(x-4)=0$$

לכן:

$$S=\int_2^4 |g(x)-f(x)|\,dx$$

$$=\int_2^4 |-x^2+8x-9-2x+1|\,dx$$

$$=\int_2^4 |-x^2+6x-8|\,dx=-\frac{x^3}{3}+3x^2-8x\Big|_2^4$$

$$=-\frac{4^3}{3}+3\cdot4^2-8\cdot4-\left(-\frac{2^3}{3}+3\cdot2^2-8\cdot2\right)$$

$$=20-18\frac{2}{3}=1\frac{1}{3}$$

2. $$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \left|\cos x - \frac{1}{2}\right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x - \frac{1}{2}\, dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{2} - \cos x\, dx$$

$$= \left(\sin x - \frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} + \left(\frac{x}{2} - \sin x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= \sin\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} - \sin\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3}$$

$$= \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} + 1 = 1 + \sqrt{3} + \frac{5\pi}{12}$$

תרגילים ממבחנים קודמים

תרגיל: חשב: $\int_0^2 \sin[x]\,dx$

פתרון:

$$\underset{x\in[0,2]}{\sin[x]} = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ \sin 1 & 1 \le x < 2 \\ \sin 2 & x = 2 \end{cases}$$

לכן:

$$\int_0^2 \sin[x]\,dx = \int_0^1 \sin[x]\,dx + \int_1^2 \sin[x]\,dx$$

$$= \int_1^2 \sin 1\,dx = \sin 1$$

תרגיל: חשב: $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^2 \frac{dx}{\varepsilon\cdot x^4+2}$

פתרון: לפי משפט ערך הממוצע האינטגרלי, קיימת נקודה $c \in [0,2]$ כך ש-

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^2 \frac{dx}{\varepsilon\cdot x^4+2} = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\cdot\frac{1}{\varepsilon\cdot c^4+2} = 1$$

תרגיל: חשב:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{x+3}\,dx$$

פתרון: לכל $x\in[0,1]$ מתקיים

$$0\leq \frac{x^n}{x+3} \leq x^{n-1}$$

לכן:

$$0\leq \int_0^1 \frac{x^n}{x+3}\,dx \leq \int_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{x^n}{n}\Big|_0^1 = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to 0]{} 0$$

לכן:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{x+3}\,dx = 0$$

תרגיל: הוכח את אי-שוויון הבא:

$$\frac{2\pi}{7}\leq \int_0^{2\pi}\frac{1}{5-2\cos x}\,dx \leq \frac{2\pi}{3}$$

פתרון:

$$-2\leq -2\cos x\leq 2 \Rightarrow 3\leq 5-2\cos x\leq 7$$

$$\Rightarrow \frac{1}{7}\leq \frac{1}{5-2\cos}\leq\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{7}\leq \int_0^{2\pi}\frac{dx}{5-2\cos x}\leq \frac{2\pi}{3}$$

תרגיל: הוכח או הפרך:

1. תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע $[a,b]$, אם $f(x)$ אינטגרבילית בכל קטע חלקי סגור $[c,d]$ כאשר $a<c<d<b$, אזי $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x\,dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$$

פתרון: 1. לא נכון. דוגמא נגדית: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ בקטע $[0,1]$

f אינטגרבילית בכל קטע $[c,d]$ כך ש- $0<c<d<1$, כי היא רציפה וחסומה בקטע זה. אבל בקטע $[0,1]$ f אינה חסומה לכן אינה אינטגרבילית.

2. נכון: לכל $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ מתקיים: $0\leq \sin x\leq 1$ לכן:

$$0\leq \sin^8 x\leq \sin^2 x\leq 1 \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x\,dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$$

056

1

אוניברסיטת חיפה
חדו"א ב' - תרגול מס'
אסלאם עפדיה

+ אינטגרל לא אמיתי
+ מבחני התכנסות
+ אינטגרל של פונקציה לא חסומה

אינטגרל לא אמיתי (עם גבולות אינסופיים):

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx$$

תרגיל: חשב את האינטגרלים הבאים:

1. $\int_0^\infty e^{-2x}dx$
2. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$
3. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$
4. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+9}$
5. $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$

פתרון: .1

$$\int_0^\infty e^{-2x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-2x}dx = \lim_{b\to\infty}\frac{-e^{-2x}}{2}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}\frac{-e^{-2b}+1}{2} = 1/2$$

2

2. $$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} -x^{-1}\Big|_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{b} + 1 = 1$$

3. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{a} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{a}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{b\to-\infty}\int_b^a \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{c\to\infty}\int_a^c \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{b\to-\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_b^a + \lim_{c\to\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_a^c$$

$$= \lim_{b\to-\infty} -\operatorname{arctg} b + \lim_{c\to\infty} \operatorname{arctg} c$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

4. $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x+2)^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathrm{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$$

5. $$\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \int_{2}^{\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x|\Big|_{2}^{\infty} = \lim_{b\to\infty}\ln\ln b - \ln\ln 2$$

$$= \infty$$ (האינטגרל מתבדר)

מבחני התכנסות

הגדרה: תהי $f(x)$ פונקציה מוגדרת בקטע $[a,\infty)$, אם מתקיים: $\int_a^\infty |f(x)|dx < \infty$ (מתכנס) אזי אומרים שהאינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס בהחלט.

משפט: אם $\int_a^\infty |f(x)|dx$ מתכנס אזי גם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.

תרגיל: בדוק התכנסות האינטגרל: $\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx$

פתרון: נשתמש במשפט האחרון ואי-שוויון:

$$|e^{-x}\cos x| \le e^{-x}$$

ונבדוק התכנסות $\int_0^\infty e^{-x}dx$:

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1$$

לכן $\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx$ מתכנס, ונוכל לומר שערכו קטן מ- 1.

מבחן ההשוואה

משפט: יהיו $f(x), g(x)$ אי-שליליות בקטע $[a,\infty)$ ואינטגרביליות בכל תת-קטע $[a,b]$ אם קיים $x_0 \in [a,\infty)$ כך שלכל $x \geq x_0$ $f(x) \leq g(x)$ אזי:

1. אם $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס אזי גם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.
2. אם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתבדר אזי גם $\int_a^\infty g(x)dx$ מתבדר.

תרגיל: בדוק התכנסות האינטגרלים:

1. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+\sin^2 x}$ 2. $\int_1^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{2x}dx$

פתרון: 1. $\frac{1}{x^2+\sin^2 x} \leq \frac{1}{x^2}$ לכל $x \in [1,\infty)$

ידוע ש- $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ מתכנס לכן גם האינטגרל הנבדק מתכנס.
(לפי מבחן ההשוואה)

.2 $\frac{\ln(x^2+1)}{2x} > \frac{\ln x^2}{2x} = \frac{2\ln x}{2x} = \frac{\ln x}{x} > \frac{1}{x}$

לכל $x \in (e,\infty)$

ידוע ש- $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ מתבדר לכן לפי מבחן ההשוואה האינטגרל הנבדק מתבדר.

מבחן המנה

משפט: יהיו $f(x)$, $g(x)$ אי-שליליות בקטע $[a,\infty)$. נגדיר l להיות הגבול:

$l = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, אזי:

1. אם $l=0$ וגם $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס אזי גם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.
2. אם $0<l<\infty$ אזי שני האינטגרלים $\int_a^b g(x)dx$, $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנסים יחד או מתבדרים יחד.
3. אם $l=\infty$ וגם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס אזי גם $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס.

תרגיל: בדוק התכנסות האינטגרלים:

1. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{tg(1/x)}{3+x\sqrt{x}}\,dx$ 2. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{arctg\,x}{x}\,dx$

פתרון: 1. נגדיר $f(x)=\frac{tg\,1/x}{3+x\sqrt{x}}$, $g(x)=\frac{1}{x^2}$ ונחשב את הגבול:

$$l=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\,tg\,1/x}{3+x\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sin 1/x}{1/x\ \cos 1/x}}{3+x\sqrt{x}}=0$$

ידוע ש- $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ מתכנס אזי מבחן המנה האינטגרל הנבדק מתכנס.

2. נגדיר $f(x)=\frac{arctg\,x}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x}$ ונחשב את הגבול:

$$l=\lim_{x\to\infty}\frac{x\,arctg\,x}{x}=\frac{\pi}{2}$$

ידוע ש- $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$ מתבדר אזי לפי מבחן המנה, גם האינטגרל הנבדק מתבדר (שניהם מתבדרים יחד)

מבחן דיריכלה

משפט: יהיו $f(x)$, $g(x)$ פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ לכל $b>a$.
אם לכל $b>a$ האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ חסום ו- $g(x)$ מונוטונית שואפת לאפס ($\lim_{x\to\infty} g(x)=0$) אזי האינטגרל $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ מתכנס.

תרגיל: בדוק התכנסות האינטגרלים:

1. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ 2. $\displaystyle\int_1^\infty \sin x^2\, dx$

פתרון: 1. נגדיר $f(x)=\sin x$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

$$\left|\int_1^b \sin x\, dx\right| = \left|-\cos x\Big|_1^b\right| = |\cos 1-\cos b|\le 2$$

כלומר האינטגרל חסום לכל b ב- $(1,\infty)$.
מצד שני $g(x)$ מונוטונית יורדת לאפס, לכן לפי דיריכלה האינטגרל הנבדק מתכנס.

2. נשתמש בהצבה: $t=x^2$ אזי $x=\sqrt{t}$ ו- $2x\,dx=dt$
כלומר $dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ לכן:

$$\int_1^\infty \sin x^2\, dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$$

אינטגרל זה מתכנס על סמך תרגיל קודם.

8

אינטגרל של פונקציה לא חסומה (אינטגרל לא אמיתי מסוג שני)

הגדרה: תהי $f(x)$ פונקציה לא חסומה ומקיימת:

$\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$ אם f רציפה בקטע $[a,b)$

אז:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

(באופן דומה מגדירים את האינטגרל אם f לא חסומה מכיוון a)

תרגיל: חשב את האינטגרלים:

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

2. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x}$

3. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x \cos x}$

פתרון:

1. $$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} 2\sqrt{x-1}\Big|_{1+\varepsilon}^2$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(2 - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2$$

064

(9)

2. $$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_0^{1/2} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}\Big|_0^{1/2} =$$

$$-\frac{1}{\ln \frac{1}{2}} + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\ln \varepsilon} = \frac{1}{\ln 2}$$

3. $$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x \, dx}{\sin x \cos^2 x} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{tg x \cos^2 x}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln tg\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) - \ln tg \frac{\pi}{4} = \infty$$

האינטגרל מתבדר.

<u>משפט:</u> תהי $f(x)$ מוגדרת בקטע $[a,b)$ ואינטגרבילית בקטע $[a,b-\varepsilon]$, לכל $\varepsilon > 0$, ויהי $M > 0$ אז:

1. אם $0 \le f(x) \le \frac{M}{(b-x)^\alpha}$ לכל $x \in [a,b)$ וכן $1 > \alpha$ אזי האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס.

2. אם $\frac{M}{(b-x)^\alpha} \le f(x)$ לכל $x \in [a,b)$ ואם $\alpha \ge 1$ אזי $\int_a^b f(x)dx$ מתבדר.

(10)

תרגיל: בדוק התכנסות האינטגרלים:

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-x^3}}$ 2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x-\sin x}$ 4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$

פתרון:

.1

$$\frac{e^x}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{e^x}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x+x^2}} \leq \frac{e}{\sqrt{1-x}} \qquad x\in[0,1)$$

לכן האינטגרל הנבדק מתכנס.

.2

$$\frac{x^3}{\sqrt[3]{(1-x)^5(1+x)^5}} \leq \frac{1}{(1-x)^{5/3}} \longrightarrow \text{האינטגרל מתבדר.}$$

.3

$$\frac{1}{x-\sin x} \geq \frac{1}{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)} = \frac{6}{x^3} \longrightarrow \text{האינטגרל מתבדר.}$$

.4

$$\frac{1}{\sqrt{\sin x}} \underset{x-\text{טור}}{\leq} \frac{1}{\sqrt{x}} \longrightarrow \text{האינטגרל מתכנס.}$$

(1)

אוניברסיטת חיפה
חדו"א ב' - תרגול מס'
אסלאם עפאריה

טורים
- טור גיאומטרי
- טור טלסקופי
- קריטריון קושי להתכנסות טור
- משפטים בסיסיים להתכנסות טורים

הגדרה: תהי $\{a_n\}_1^\infty$ סדרת מספרים, הביטוי:

$$\sum_{n=1}^\infty a_n = a_1 + a_2 + \cdots$$

נקרא טור אינסופי, a_n נקרא האיבר הכללי של הטור.

הגדרה: טור $\sum_{n=1}^\infty a_n$ נקרא טור מתכנס אם סדרת הסכומים החלקיים $\{S_n\}_1^\infty$ מתכנסת. כאשר $\{S_n\}_1^\infty$ היא הסדרה:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

אם לסדרה $\{S_n\}_1^\infty$ אין גבול, אז אומרים שהטור $\sum_1^\infty a_n$ מתבדר.

תרגיל: בדוק התכנסות הטור: $\sum_1^\infty \left(\frac{3}{5}\right)^n$.

פתרון: נסמן: $S = \sum_1^\infty \left(\frac{3}{5}\right)^n$ כלומר:

$$S = \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \cdots$$

$$S = \frac{3}{5} + \frac{3}{5}\left(\frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \cdots\right)$$

$$S = \frac{3}{5} + \frac{3}{5}S$$

$$S - \frac{3}{5}S = \frac{3}{5}$$

$$\frac{2}{5}S = \frac{3}{5}$$

$$S = \frac{3}{2}$$

כלומר הטור הנבדק מתכנס וסכומו שווה ל- $3/2$.

תרגיל: בדוק התכנסות הטור הגיאומטרי $\sum_{1}^{\infty} q^n$, $q \in \mathbb{R}$.

פתרון: באופן דומה לתרגיל קודם, נסמן:

$$S = \sum_{1}^{\infty} q^n$$

$$S = q + q^2 + q^3 + \cdots$$

ברור שאם $|q| \geq 1$ הטור מתבדר. נבדק עבור $|q|<1$:

$$S = q + q(q + q^2 + q^3 + \cdots)$$

$$S - qS = q$$

$$S = \frac{q}{1-q} \quad , \quad |q| < 1$$

תרגיל: בדוק התכנסות הטורים:

1. $\sum_{1}^{\infty} 9^{-n+2} \cdot 4^{n+1}$

2. $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-4)^{3n}}{5^{n-1}}$

פתרון: 1)

$$\sum_{1}^{\infty} 9^{-n+2} \cdot 4^{n+1} = \sum_{1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{9^{n-2}} = \sum_{1}^{\infty} 16 \cdot 9 \, \frac{4^{n-1}}{9^{n-1}}$$

$$= \sum_{1}^{\infty} 144 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

זהו טור גיאומטרי עם מקדם $q = \frac{4}{9} < 1$ לכן מתכנס.

2)

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-4)^{3n}}{5^{n-1}} = \sum_{1}^{\infty} \frac{\left((-4)^3\right)^n}{5^{n-1}} = \sum_{1}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{-64}{5}\right)^n$$

זהו טור גיאומטרי עם מקדם $q = \frac{-64}{5}$, $|q| > 1$ לכן מתבדר.

תנאי הכרחי להתכנסות טור:

משפט: אם $\sum_{1}^{\infty} a_n$ מתכנס אזי $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

069

(4)

תרגיל: בדוק התכנסות הטורים הבאים:

1. $\sum_{0}^{\infty} \frac{4n^2-n^3}{10+2n^3}$

2. $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

פתרון:

1. נשים לב שהאיבר הכללי בטור אינו שואף לאפס:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-n^3}{10+2n^3} = -1/2 \neq 0$$

לכן הטור הנבדק מתבדר.

2. נעזר בפיתוח מקלורן של $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

נציב $x=1$ ונקבל:

$$\ln 2 = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

כלומר הטור מתכנס.

070

(5)

טור טלסקופי

הגדרה: תהי $\{a_n\}_1^\infty$ סדרת מספרים, הטור:

$$\sum_1^\infty (a_{n+1} - a_n)$$ נקרא טור טלסקופי.

נחשב סכומים חלקיים S_n של טור זה:

$$S_n = a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_4 - a_3 + \cdots + a_{n+1} - a_n$$

$$= a_{n+1} - a_1$$

מסקנה: טור טלסקופי מתכנס אם"ם הסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת.

תרגיל: בדוק התכנסות הטורים הבאים:

1. $$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(n-1)}$$

2. $$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n^2+3n+2}$$

3. $$\sum_{n=1}^\infty \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

פתרון: 1. נפרק את השבר $\frac{1}{n(n-1)}$ לשני שברים חלקיים:

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-1} = \frac{A(n-1)+nB}{n(n-1)}$$

נשווה מקדמים:

$$A=-1,\quad B=1 \Leftarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A=1 \end{cases}$$

לכן:

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = -\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$$

זהו טור טלסקופי:

$$-S_n = \frac{1}{n} - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$$

לכן $S=1$

כלומר הטור מתכנס.

072

7

2.

$$\frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n+1}$$

$$(n+1)A + (n+2)B = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ A+2B=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B=1 \\ A=-1 \end{array}$$

לכן:

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2} = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

כמו טור טלסקופי, לכן:

$$-S = \lim_{n\to\infty} a_n - a_1$$

$$S = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n = 1 - 0 = 1$$

לכן טור זה מתכנס. וסכומו $S = 1$.

3.

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

לכן:

$$\sum_{1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{1}^{\infty} \ln(n+1) - \ln(n)$$

כמו טור טלסקופי, לכן:

$$S = \lim_{n\to\infty} a_n - a_1 = \lim_{n\to\infty} \ln(n) - 0 = \infty$$

לכן הטור מתבדר.

8

קריטריון קושי להתכנסות טורים

משפט: הטור $\sum_{1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם"ם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N(\varepsilon)$ כך שלכל $n > N(\varepsilon)$ ולכל $p \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

תרגיל: בדוק התכנסות הטורים הבאים לפי קריטריון קושי:

1. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 2. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

פתרון: 1. נבחר $p = n$:

$$|S_{2n} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}|$$

$$= \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right| > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

מכך אם נבחר $\varepsilon = \frac{1}{2}$ אזי הטור מתבדר, לפי קריטריון קושי.

2. נוכיח שהטור מתכנס:

$$|S_{n+p} - S_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} <$$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} =$$

074

(9)

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

לכן אם נבחר $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$ נקבל שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$ כך שלכל $p \in \mathbb{N}$ ו- $n > N(\varepsilon)$ מתקיים:

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

כלומר הטור מתכנס.

<u>תרגיל:</u> הוכח התבדרות הטורים הבאים ע"י שימוש בקריטריון קושי:

1. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 2. $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

<u>פתרון:</u> (1) נבחר $p=n$:

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}}$$

$$> \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+1} > n \cdot \frac{1}{n+2}$$

$$= 1$$

לכן אם נבחר $\varepsilon = 1$ אז לפי קריטריון קושי הטור מתבדר.

075

(10)

2. נבחר $p=n$:

$$|S_{2n}-S_n| = \frac{2^{n+1}}{n+1} + \frac{2^{n+2}}{n+2} + \cdots + \frac{2^{2n}}{2n} > n\cdot\frac{2^{n+1}}{2n} = 2^n > 1$$

כלומר אם נבחר $\varepsilon=1$ אזי לפי קריטריון קושי הטור מתבדר.

משפטים בסיסים להתכנסות טורים

משפט: לכל $c\in\mathbb{R}$ השונה מאפס, שני הטורים $\sum_1^\infty a_n$, $\sum_1^\infty ca_n$ מתכנסים יחד או מתבדרים יחד.

משפט: אם הטורים $\sum_1^\infty a_n$, $\sum_1^\infty b_n$ מתכנסים לגבולות A, B בהתאמה אזי הטור $\sum_1^\infty a_n \pm b_n$ מתכנס לגבול $A\pm B$.

תרגיל: בדוק התכנסות הטורים הבאים:

1. $\sum_1^\infty \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

2. $\sum_1^\infty \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$

פתרון: 1

$$\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)+\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)$$

כלומר:

$$\sum_{1}^{\infty}\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=\sum_{1}^{\infty}\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-\sum_{1}^{\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+2}-\sqrt{2}-\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}+1-\sqrt{2}$$

* לשים לב שאם שני הטורים מתבדרים אזי זה לא אומר שהסכום או ההפרש שלהם מתבדר.

נחשב את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\cdot\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2-n-1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=0$$

לכן הטור הנבדק מתכנס וסכומו שווה ל- $1-\sqrt{2}$.

077

12

.2

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} + \frac{C}{2n+3}$$

$$A(2n+1)(2n+3) + B(2n-1)(2n+3) + C(2n-1)(2n+1) = 1$$

נציב $2n=1$ ונקבל:

$$A(2 \cdot 4) = 1$$

$$A = \frac{1}{8}$$

נציב $2n=-1$:

$$B(-2 \cdot 2) = 1$$

$$B = -1/4$$

נציב $2n=-3$:

$$C(-4 \cdot (-2)) = 1$$

$$C = +\frac{1}{8}$$

13

לכן:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{1/8}{2n-1} - \frac{2/8}{2n+1} + \frac{1/8}{2n+3}$$

סכום:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1/8}{2n-1} - \frac{1/8}{2n+1} + \sum_{1}^{\infty} \frac{1/8}{2n+3} - \frac{1/8}{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1/8\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) + \lim_{n\to\infty} 1/8\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = 1/12$$

לכן הטור מתכנס וסכומו שווה ל- $1/12$

(1)

אוניברסיטת חיפה
תשע"א ב' - תרגול מס'
אסלאם עפריף

+ טורים חיוביים
+ מבחני התכנסות
+ טורים כלליים

<u>הגדרה</u>: טור חיובי זהו טור של איברים אי-שליליים.
(פרט למספר סופי של איברים).

<u>משפט</u>: טור חיובי מתכנס אם"ם סדרת הסכומים החלקיים שלו חסומה.

<u>מבחן האינטגרל</u>:

<u>משפט</u>: תהי $f(x)$ פונקציה רציפה חיובית ולא עולה בקטע $[K,\infty)$, וגם $f(n)=a_n$. אזי:

1. אם $\int_K^\infty f(x)dx$ מתכנס אזי גם $\sum_{n=K}^\infty a_n$ מתכנס.

2. אם $\int_K^\infty f(x)dx$ מתבדר אזי גם $\sum_{n=K}^\infty a_n$ מתבדר.

<u>תרגיל</u>: בדוק התכנסות הטורים הבאים:

1. $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

2. $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\ln^\alpha n}$ $\alpha\in\mathbb{R}$.

3. $\sum_{n=1}^\infty \left(\int_0^n \sqrt[5]{1+x^5}\,dx\right)^{-1}$

<u>פתרון</u>: 1. עבור $\alpha\le 0$ ברור שהטור מתבדר.

עבור $0<\alpha$ נשתמש במבחן האינטגרל: נגדיר $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$

f פונקציה חיובית ומונוטונית יורדת.

(2)

לכן הטור הנבדק והאינטגרל $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ מתכנסים או מתבדרים יחד.

סה"כ $\sum_1^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ מתכנס עבור $1<\alpha$, ומתבדר עבור $1\geq\alpha$.

2. באופן דומה לסעיף קודם, נגדיר פונקציה $f(x)=\frac{1}{x\ln^\alpha x}$, f מונוטונית יורדת וחיובית. לכן הטור הנבדק ו- $\int_1^\infty \frac{dx}{x\ln^\alpha x}$ מתכנסים או מתבדרים יחד.

סה"כ: הטור מתכנס עבור $1<\alpha$, ומתבדר עבור $1\geq\alpha$.

3. טור זה חיובי ומתקיים:

$$\sum_1^\infty \left(\int_0^n \sqrt[5]{1+x^5}\,dx\right)^{-1} \leq \sum_1^\infty \left(\int_0^n x\,dx\right)^{-1}$$

$$= \sum_1^\infty \left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^n\right)^{-1} = \sum_1^\infty \frac{2}{n^2}$$

זהו טור מתכנס לפי סעיף א'. לכן הטור הנבדק מתכנס.

<u>מבחן ההשוואה</u>: (עבור טורים חיוביים)

משפט: אם החל ממקום מסוים $\sum_{n_0}^\infty a_n \leq \sum_{n_0}^\infty b_n$ אזי:

1. מהתכנסות הטור $\sum_1^\infty b_n$ נובעת התכנסות $\sum_1^\infty a_n$

2. מהתבדרות הטור $\sum_1^\infty a_n$ נובעת התבדרות הטור $\sum_1^\infty b_n$

תרגיל: בדוק התכנסות הטורים הבאים:

1. $\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{3^n+n}$

2. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n}{n^2-\cos^2(n)}$

3. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

4. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^4+5}$

פתרון:

1. $\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{3^n+n} \leq \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{3^n} < \infty$

טור גיאומטרי מתכנס. לכן הטור הנבדק מתכנס.

2. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n}{n^2-\cos^2(n)} \geq \sum_{1}^{\infty} \frac{n}{n^2} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ← מתבדר, לכן הטור הנבדק מתבדר.

3. $\frac{n!}{n^n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{n^n} \leq \frac{1\cdot 2\cdot n\cdot n\cdots n}{n^n} = \frac{2}{n^2}$

$\sum_{1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ מתכנס לכן הטור הנבדק מתכנס.

4. $\frac{n^2+2}{n^4+5} < \frac{n^2+2}{n^4} = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^4}$

לכן $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^4}$ מתכנס הטור הנבדק מתכנס.

מבחן המנה: (טורים חיוביים)

משפט: עבור שני הטורים $\sum_{1}^{\infty} a_n$, $\sum_{1}^{\infty} b_n$ נגדיר את הגבול:

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

1. אם $0 < l < \infty$ אזי שני הטורים מתכנסים או מתבדרים יחד.
2. $l = 0$ אזי מהתכנסות $\sum_{1}^{\infty} b_n$ נובעת התכנסות $\sum_{1}^{\infty} a_n$
3. $l = \infty$ מהתכנסות $\sum_{1}^{\infty} a_n$ נובעת התכנסות $\sum_{1}^{\infty} b_n$.

תרגיל: בדוק התכנסות הטורים הבאים:

1. $\sum_{2}^{\infty} \frac{4n^2+n}{\sqrt[3]{n^7+n^3}}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2}{n}\right)$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$
4. $\sum_{1}^{\infty} \sqrt[5]{\frac{n^2+n+\sin(n)}{n^{12}+1}}$

083

5

פתרון:

1. נשווה את הטור הנבדק עם $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ונחשב את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+n}{\sqrt[3]{n^7+n^3}}\cdot\sqrt{n} = 4$$

לכן שני הטורים מתבדרים יחד.

2. נשווה טור נבדק עם $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

לכן שני הטורים מתבדרים יחד.

3. נשווה טור נבדק עם $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}} = 1$$

לכן שני הטורים מתבדרים יחד.

4. נשווה טור נבדק עם $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[5]{\frac{n^2+n+\sin(n)}{n^{12}+1}}\cdot n^2 = 1$$

לכן שני הטורים מתכנסים יחד.

6

מבחן דלמבר:

משפט: אם החל ממקום מסוים, איברי הטור $\sum_{1}^{\infty} a_n$ מקיימים:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$$

אזי הטור מתכנס.

אם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ הטור מתבדר.

תרגיל: בדוק התכנסות הטור:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{2-(-1)^n}{4^n}$$

פתרון: נשתמש בדלמבר:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2-(-1)^{n+1}}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{2-(-1)^n} > \frac{3}{4}$$

לכן לפי דלמבר הטור מתכנס.

(7)

* הערה: האי-שוויון: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$ לא ניתן להחליף ב- $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, דוגמא: $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$$

אבל $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר.

משפט: אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ אזי:

1. $l < 1$ הטור $\sum_{1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
2. $1 < l$ הטור $\sum_{1}^{\infty} a_n$ מתבדר.
3. $l = 1$ משפט זה אינו מספק מידע על התכנסות או התבדרות טור זה.

תרגיל: בדוק התכנסות הטורים הבאים:

1. $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$
2. $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$
3. $\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$

פתרון:

1. $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n n!}=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{2}{e}<1$$

לכן הטור הנתון מתכנס.

2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0$$

לכן הטור מתכנס.

3. $$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{3^n n!}=\lim_{n\to\infty}3\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{3}{e}>1$$

לכן הטור מתבדר.

משפט: (קושי)

יהי $\sum a_n$ טור חיובי, אם החל ממקום מסויים:

$$\sqrt[n]{a_n}\le q<1$$

אזי הטור מתכנס.

ואם $\sqrt[n]{a_n}\ge 1$ הטור מתבדר.

(משפט זה אנלוגי למשפט דלמבר עם עבור הגבול $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$)

(9)

תרגיל: בדוק התכנסות הטורים הבאים:

1. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^{100}}{2^n}$ 2. $\sum_{1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{3^n}$

3. $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$ 4. $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n+5}{3^n}$

פתרון:

1. $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{100}}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$$

לכן הטור מתכנס.

2. $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{3^n}} = \frac{e}{3} < 1$$

הטור מתכנס.

3. $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

הטור מתכנס.

4. $$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4}{3^n}}}_{\downarrow\, 1/3} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(-1)^n+5}{3^n}} \le \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{6}{3^n}}}_{\downarrow\, 1/3}$$

לכן הטור מתכנס.

088

10

טורים כלליים

הגדרה: אומרים שהטור $\sum_1^\infty a_n$ מתכנס בהחלט אם הטור:
$\sum_1^\infty |a_n|$ מתכנס.

אם הטור $\sum_1^\infty a_n$ מתכנס ו- $\sum_1^\infty |a_n|$ מתבדר, אזי
אומרים שהטור $\sum_1^\infty a_n$ מתכנס בתנאי.

משפט: טור מתכנס בהחלט מתכנס.

תרגיל: בדוק התכנסות בהחלט או בתנאי של הטורים הבאים:

1. $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}$ 2. $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n}$

פתרון:

1. $$\sum_1^\infty \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$$

לכן טור זה מתכנס בהחלט.

2. $$\sum_1^\infty \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_1^\infty \frac{1}{n}$$ מתבדר

אבל ראינו שטור $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n}$ מתכנס וסכומו שווה $\ln 2$
לכן הטור מתכנס בתנאי.

089 (11)

טורי לייבניץ

משפט: תהי a_n סדרה מונוטונית יורדת ו- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

אז:
1. הטור $\sum_{0}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס.
2. אם S הוא הסכום שלו אז $0 < S < a_1$
3. הזנב (השארית) של הטור r_n מקיים: $|r_n| < a_{n+1}$

* **הערה:** טור מהצורה הנ"ל נקרא טור לייבניץ.

תרגיל: בדוק התכנסות בהחלט או בתנאי של הטורים הבאים:

1. $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(n)}{n}$
2. $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
3. $\sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$

פתרון: 1. טור זה מחליף סימן ו- $\frac{\ln(n)}{n}$ מונוטונית יורדת לאפס החל מ- $n=3$. לכן לפי לייבניץ טור זה מתכנס. נבדוק התכנסות בהחלט:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n} > \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

טור זה מתבדר. סה"כ הטור הנבדק
מתכנס בתנאי.

2. $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

זהו טור לייבניץ, לכן מתכנס.
נבדוק התכנסות בהחלט:

$$\sum_{1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

טור זה מתבדר לפי מבחן האינטגרל.
סה"כ: הטור הנבדק מתכנס בתנאי.

3. $\sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$

זהו טור לייבניץ, לכן מתכנס. נבדוק
התכנסות בהחלט:
$\sum_{2}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n\ln n}\right| = \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ טור זה מתבדר לפי מבחן
האינטגרל, סה"כ הטור מתכנס בתנאי.

091

(12) ד'

תרגיל: חשב: $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot n^3}$ בדיוק של 10^{-4}.

פתרון:

זהו טור לייבניץ. לכן נדרוש ש-

$$|r_n| < 10^{-4}$$

ידוע ש- $|r_n| < a_{n+1}$

כלומר:

$$\frac{1}{(2n+3)(n+1)^3} < 10^{-4}$$

אי שוויון זה מתקיים עבור $n=8$, לכן:

$$\sum_{1}^{8} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n^3} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{40} - \frac{1}{189} + \frac{1}{576} - \frac{1}{1375} + \frac{1}{2808} - \frac{1}{5145} + \frac{1}{8704} = -0.312$$

(13)

מבחן דיריכלה

משפט: נתון טור $\sum_{1}^{\infty} a_n \cdot b_n$, אם הסדרה $\{a_n\}$ מונוטונית שואפת לאפס, וכל הסכומים החלקיים של $\sum_{1} b_n$ חסומים אזי הטור $\sum_{1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

תרגיל: בדוק התכנסות הטורים הבאים:

1. $1 + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{2}{11} + \cdots$

2. $\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos(7n)}{n}$

פתרון 1: נסמן $a_n = \frac{1}{2n-1}$ ו- $\sum_{1} b_n = 1+1-2+1+1-2+\cdots$

הטור הנבדק הוא מהצורה $\sum_{1}^{\infty} a_n \cdot b_n$.

a_n מונוטונית יורדת לאפס, והסכומים החלקיים של b_n חסומים לכן לפי דיריכלה הטור הנבדק מתכנס.

2. נגדיר $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \cos 7n$. ברור ש- a_n מונוטונית יורדת לאפס. נוכיח שסדרת הסכומים החלקיים של $\sum_1^\infty b_n$ חסומה:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \cos 7i = \sum_1^n \frac{2\cos 7i \cdot \sin\frac{7}{2}}{2\sin\frac{7}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{7}{2}} \cdot \sum_1^n \left(\sin\left(i+\tfrac{1}{2}\right)\cdot 7 - \sin\left(i-\tfrac{1}{2}\right)\cdot 7\right)$$

$$\boxed{2\sin\theta\cos\varphi = \sin(\theta+\varphi) - \sin(\varphi-\theta)}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{7}{2}}\left(\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)7 - \sin\frac{7}{2}\right) \le \frac{1}{\sin\frac{7}{2}}$$

לכן לפי דיריכלה, הטור הנבדק מתכנס.

תרגיל: הוכח או הפרך:

1. אם $\sum_1^\infty a_n$ מתכנס, אזי $\sum_1^\infty a_n^2$ מתכנס.
2. אם $\sum_1^\infty a_n$ מתכנס, אזי גם $\sum_1^\infty (-1)^n a_n$ מתכנס.
3. אם $\sum_1^\infty a_n$ טור חיובי וגם $\lim_{n\to\infty} n\cdot a_n = 1/2$ אזי $\sum_1^\infty a_n$ מתבדר.

פתרון:

1. לא נכון, דוגמא נגדית: $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

2. לא נכון, דוגמא נגדית: $\sum_{1}^{\infty} a_n = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

לכן: $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$

3. נכון: $\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = 1/2$

לכן לפי מבחן ההשוואה שני הטורים מתבדרים יחד.

(1)

אוניברסיטת חיפה
חדו"א 2 - תרגול מס'
אפלאם עפריף

סדרות של פונקציות
טורי פונקציות

__הגדרה:__ סדרת פונקציות היא סדרה מן הצורה:

$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ כאשר

$f_i(x)$ מוגש הן פונקציות המוגדרות בתחום $D \subseteq \mathbb{R}^1$

אם עבור $x_0 \in D$ הסדרה $\{f_n\}_1^\infty$ מתכנסת ב- x_0 אזי, x_0
נקראת נקודת התכנסות של הסדרה. אוסף כל נקודות ההתכנסות
נקרא תחום ההתכנסות של הסדרה. גבול הסדרה בתחום התכנסות
נקבע ע"י כל x הנמצא בתחום זה, לכן הגבול הוא פונקציה $f(x)$.
ונסמן:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

__דוגמא:__

$f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$ לכל x ממש'.

אזי: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sqrt{x^2} = |x|$

כלומר הפונקציה הגבולית היא:

$$f(x) = |x|$$

ותחום ההתכנסות הוא כל הישר.

דוגמא: $f_n(x) = x^n$ בקטע $[0,1]$

אזי: $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

כלומר הפונקציה הגבולית היא: $$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

תרגיל: מצא את הפונקציה הגבולית של הסדרות:

1. $f_n(x) = \dfrac{\cos nx}{1+n+x}$, $x \in \mathbb{R}$

2. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x}$, $x \in [0,1]$

3. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $x \in [0,1]$

פתרון:

1. $f(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\cos nx}{1+n+x} = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

2. $f(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{nx}{1+n+x} = x \Rightarrow f(x) = x$

3. $f(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{nx}{1+n^2x^2} = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

התכנסות במידה שווה (במ"ש)

הגדרה: $f_n(x)$ מתכנס במ"ש ל- $f(x)$ בתחום D $\Longleftrightarrow$
לכל $\varepsilon>0$ קיים N_ε (התלוי רק ב- ε ולא תלוי ב- x)
כך שלכל $n>N_\varepsilon$ ולכל $x\in D$ מתקיים:

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

דוגמא: $f_n(x)=\frac{nx}{1+n+x}$ בקטע $[0,1]$ מתכנסת במ"ש
לפונקציה $f(x)=x$:

$$\left|\frac{nx}{1+n+x}-x\right|=\left|\frac{nx-x-nx-x^2}{1+n+x}\right|=\left|\frac{-x-x^2}{1+n+x}\right|\leq\frac{2}{1+n}<\varepsilon$$

דוגמא: $f_n(x)=\frac{\cos nx}{1+n+x}$ איננה מתכנסת במ"ש ל- $f(x)=0$.
כי לכל n הפונקציה $f_n(x)$ איננה חסומה בסביבת
הנקודה $x=-n-1$.

תרגיל: מצא פונקציה גבולית עבור הסדרות הבאות ובדוק
אם ההתכנסות היינה במ"ש:

1. $f_n(x)=\sin\frac{x}{n}$, $x\in\mathbb{R}$ 2.

פתרון:

1. $f(x)=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{x}{n}=0 \Rightarrow f(x)=0$

אבל לכל מספר n קיים $x\in\mathbb{R}$ כך ש- $\sin\frac{x}{n}=1$

לכן ההתכנסות איננה במ"ש.

2. $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \Rightarrow f(x)=0$

וההתכנסות הינה במ"ש, כי:

$$\left|\frac{\sin nx}{n}-0\right|\le\frac{1}{n}<\varepsilon$$

משפט: סדרת הפונקציות $\{f_n(x)\}_1^\infty$ מתכנסת במ"ש ל- $f(x)$ בתחום D אמ"מ:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0$$

תרגיל: מצא פונקציה גבולית ובדוק התכנסות במ"ש:

1. $f_n(x)=\operatorname{arctg} nx \quad , \quad x\in(0,\infty)$
2. $f_n(x)=n\left(x^{1/n}-1\right) \quad , \quad x\in[1,2]$
3. $f_n(x)=n^2x^2e^{-n^2x^2} \quad , \quad x\in[0,\infty)$

099

5

פתרון:

1. $f(x)=\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x)=\frac{\pi}{2}$

אבל ההתכנסות איננה במ"ש כי:

$$\sup_{x\in(0,\infty)} \left|\operatorname{arctg} nx - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2} \neq 0$$

2. $f(x)=\lim_{n\to\infty} n\left(x^{1/n}-1\right)=\lim_{n\to\infty} \dfrac{x^{1/n}-1}{\frac{1}{n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n^2}x^{1/n}\ln x}{-\frac{1}{n^2}} = \ln x \Rightarrow f(x)=\ln x$$

נבדוק התכנסות במ"ש: נסמן:

$$\psi_n(x)=|f_n(x)-f(x)|$$
$$= n\left(x^{1/n}-1\right)-\ln x$$

$$\psi_n'(x)= x^{\frac{1}{n}-1}-\frac{1}{x}=\frac{x^{1/n}-1}{x} > 0$$

לכן $\psi(x)$ פונקציה עולה והמקסימום שלה מתקבל בקצה ימני של הקטע $[1,2]$. לכן:

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n(2)=\lim_{n\to\infty} n\left(2^{1/n}-1\right)-\ln 2$$
$$=0$$

לכן ההתכנסות הינה במ"ש.

100

(6)

ג. $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2x^2}{e^{n^2x^2}}=0 \Rightarrow f(x)=0$

נגדיר:

$$\psi_n(x)=n^2x^2e^{-n^2x^2}$$

$$\psi_n'(x)=2xe^{-n^2x^2}n^2(1-n^2x^2)=0$$

$$\Rightarrow x=0\ ,\ x=\frac{1}{n}$$

לכן:

$$\max_{x\in[0,\infty)}\psi_n(x)=\psi_n\left(\tfrac{1}{n}\right)=\frac{1}{e}\neq 0$$

לכן ההתכנסות איננה במ"ש.

__משפט:__ אם סדרת פונקציות רציפות $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במ"ש בתחום D לפונקציה $f(x)$ אזי $f(x)$ רציפה.

__תרגיל:__ הוכח שהסדרות הבאות לא מתכנסות במ"ש:

1. $f_n(x)=x^n \quad x\in[0,1]$

2. $f_n(x)=\frac{1}{1+nx}\ ,\ x\in[0,1]$

__פתרון 1:__ $f_n(x)$ רציפה לכל n, אבל:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,1)\\ 1 & x=1\end{cases}$$

איננה רציפה לכן ההתכנסות איננה במ"ש.

7

2. $f_n(x)$ רציפה לכל n, אבל:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+nx}=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x\in(0,1]\end{cases}$$

$f(x)$ איננה רציפה, לכן ההתכנסות איננה במ"ש.

טורי פונקציות

הגדרה: תהי $\{f_n(x)\}_1^\infty$ סדרת פונקציות המוגדרת בתחום D, אז:
$\sum_1^\infty f_n(x)$ נקרא טור פונקציות.
אוסף כל הנקודות $x\in D$ שבהן הטור מתכנס, נקרא תחום ההתכנסות.

תרגיל: מצא תחום ההתכנסות של הטורים הבאים:

1. $\sum_1^\infty \left(7^{3n}+5^{2n}\right)x^{3n}$

2. $\sum_1^\infty \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{x^{3n}}{n}$

3. $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{2n}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

8

1

פתרון: נחשב את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(7^{3n}+5^{2n})\,x^{3n}}{(7^{3n+3}+5^{2n+2})\,x^{3n+3}}\right|$$

$$= \frac{1}{7^3|x^3|}$$

משפט מבחן קודם: ($\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ הוא מבחן)

נדרוש ש-

$$7^3|x^3| < 1$$

כלומר

$$-\frac{1}{7^3} < x^3 < \frac{1}{7^3}$$

או בצורה אחרת:

$$-\frac{1}{7} < x < \frac{1}{7}$$

נבדוק מה קורה בקצוות: עבור $x=1/7$: אנחנו מקבלים טור:

$$\sum_{1}^{\infty}\left(7^{3n}+5^{2n}\right)\left(\frac{1}{7}\right)^{3n}$$

זהו טור מתבדר כי האיבר הכללי שלו אינו שואף לאפס.

אותו הדבר לגבי $x=-1/7$. לכן תחום ההתכנסות הוא: $(-1/7, 1/7)$.

9

2.

נשתמש במבחן השורש:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^{3n}}{n}\right|} = e|x^3|$$

לכן: $-\frac{1}{e} < x^3 < \frac{1}{e}$

או $-\frac{1}{\sqrt[3]{e}} < x < \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

נבדוק את הקצוות: עבור $x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$:

$$\sum_{1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n n}$$

נשווה טור כזה עם $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n \cdot n} \cdot n = 1$$

לכן שני הטורים מתבדרים יחד.

עבור $x = \frac{-1}{\sqrt[3]{e}}$ נקבל:

$$\sum_{1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{(-1)^n}{e^n \cdot n}$$

זהו טור לייבניץ, לכן מתכנס.

סה"כ: תחום ההתכנסות הוא: $[-e^{1/3}, e^{1/3})$

(10)

ז.

נשתמש במבחן השורש:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2n}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \left|\frac{1-x}{1+x}\right| < 1 \iff x>0$$

נבדוק עבור $x=0$:

$\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{2n}$, לפי טור לייבניץ לכן מתכנס. סה"כ תחום ההתכנסות הוא $x \geq 0$.

התכנסות במ"ש:

הגדרה: טור $\sum_1^\infty f_n(x)$ מתכנס במ"ש בתחום D אם סדרת הסכומים החלקיים שלו, $\{S_n(x)\}_1^\infty$ מתכנסת במ"ש ב- D.

דוגמא:

$$\sum_1^\infty \frac{x^n}{n^2}-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}, \quad |x|\le 1$$

זהו טור טלסקופי ולכן:

$$S_n(x) = x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$S_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} S(x)=x$$

$S_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל- x:

$$|S_n(x)-S(x)| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right| \le \frac{1}{(n+1)^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

ולכן הטור מתכנס במ"ש בתחום $|x|\le 1$.

11

משפט: $\sum_1^\infty f_n(x)$ מתכנס במ"ש אם"ם השארית ה-n-ית שלו $r_n(x)=\sum_{k=n}^\infty f_k(x)$ מתכנסת במ"ש באותו תחום. כלומר:

$$\sup_{x\in D}|r_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

תרגיל: בדוק התכנסות במ"ש של $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{x+2n}$ בתחום $0\leq x$.

פתרון: זהו טור לייבניץ (לכל x קבוע בתחום). לכן:

$$\left|\sum_{k=n}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{x+2k}\right| = |r_n(x)| > a_{n+1} = \frac{1}{x+2n+2}$$

$$\sup_{x\in[0,\infty)}|r_n(x)| = \frac{1}{2n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ולכן ההתכנסות היא במ"ש.

(12)

מבחן ויירשטראס

משפט: יהי $\sum_1^\infty f_n(x)$ מוגדר בתחום D, אם קיים $\sum a_n$ מתכנס כך שהחל מ-n מסוים מתקיים $|f_n(x)| \leq a_n$ לכל n ולכל $x \in D$, אזי $\sum_1^\infty f_n(x)$ מתכנס במ"ש בתחום D.

תרגיל: בדוק התכנסות במ"ש של הטורים הבאים:

1. $\sum_1^\infty \frac{\sin(nx)}{n^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$
2. $\sum_1^\infty \frac{nx}{1+n^6x^2}$, $x \in \mathbb{R}$
3. $\sum_1^\infty \frac{n+1}{\sqrt[3]{n!}}(x^n + x^{-n})$, $-\frac{1}{3} \leq x \leq 3$
4. $\sum_1^\infty \frac{n^2 x}{1+n^7x^2}$, $x \in \mathbb{R}$
5. $\sum_1^\infty \frac{\sin(nx)}{n^n}$, $x \in \mathbb{R}$

פתרון:

1. $\left|\frac{\sin(nx)}{n^2+1}\right| \leq \frac{1}{n^2+1}$ לכל n ולכל $x \in \mathbb{R}$.

ידוע ש-$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2+1}$ מתכנס, לכן לפי ויירשטראס, הטור הנבדק מתכנס במ"ש.

2. נשתמש באי-שוויון הממוצעים: לכל $a,b \geq 0$ מתקיים:
$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, נסמן: $a=1$, $b=n^6x^2$, לכן:

(13)

$$\frac{1}{2} \geqslant \frac{n^3|x|}{1+n^6x^2} \text{ או } \frac{1}{2} \geqslant \frac{\sqrt{n^6x^2}}{1+n^6x^2}$$ מכאן: $\frac{1+n^6x^2}{2} \geqslant \sqrt{n^6x^2}$

או $\frac{n|x|}{1+n^6x^2} \geqslant \frac{1}{2n^2}$, ידוע ש- $\sum_1^\infty \frac{1}{2n^2}$ מתכנס, לכן לפי

ויירשטראס הטור הנבדק מתכנס במ"ש.

3. לכל $x\in[-\frac{1}{3},3]$ מתקיים: $\frac{n+1}{\sqrt[3]{n!}}(x^n+x^{-n}) \leqslant \frac{n+1}{\sqrt[3]{n!}}2\cdot 3^n$

נבדוק התכנסות $\sum_1^\infty \frac{n+1}{\sqrt[3]{n!}}2\cdot 3^n$ לפי מבחן המנה:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{\sqrt[3]{(n+1)!}}\cdot 2\cdot 3^{n+1}\cdot\frac{\sqrt[3]{n!}}{2(n+1)3^n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3(n+2)}{n+1}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3(n+2)}{(n+1)^{4/3}} = 0$$

לכן טור זה מתכנס, לפי ויירשטראס הטור הנבדק מתכנס במ"ש.

4. נמצא את המקסימום של הביטוי: $f_n(x) = \frac{n^2x}{1+n^7x^2}$, נגזור:

$$f_n'(x) = \frac{n^2-n^9x^2}{(1-n^7x^2)^2} = 0 \implies x = \pm\sqrt{\frac{1}{n^7}}$$

לכן:

$$\max_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n^7}}\right) = \frac{n^2\cdot n^{-\frac{7}{2}}}{1+1} = \frac{1}{2n\sqrt{n}}$$

כלומר: $\frac{n^2x}{1+n^7x^2} \leqslant \frac{1}{2n\sqrt{n}}$. ידוע ש- $\sum_1^\infty \frac{1}{2n\sqrt{n}}$ מתכנס

לכן לפי ויירשטראס הטור הנבדק מתכנס במ"ש.

(14)

5. לכל n ולכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\left|\frac{\sin(nx)}{n^n}\right| \leq \frac{1}{n^n}$$

$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ מתכנס (בהשוואה עם $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$) לכן לפי ווירשטראס הטור הנבדק מתכנס במ"ש.

<u>רציפות:</u>

<u>משפט:</u> אם לכל n $f_n(x)$ פונקציה רציפה בתחום D.

ו- $\sum_{1}^{\infty}f_n(x)$ מתכנס במ"ש לפונקציה גבולית $f(x)$ בתחום D. אזי $f(x)$ רציפה ב- D.

<u>תרגיל:</u> הוכח רציפות $f(x)$ כאשר:

1. $f(x)=\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^4}$, $x\in\mathbb{R}$.

2. $f(x)=\sum_{1}^{\infty}\frac{n^2x}{1+n^7x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

3. $f(x)=\sum_{1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}$, $0\leq x\leq 1$

<u>פתרון:</u> 1. כל הפונקציות $\frac{\sin(nx)}{n^4}$ רציפות, וטור זה מתכנס במ"ש לפי ווירשטראס: $\left(\left|\frac{\sin(nx)}{n^4}\right|\leq\frac{1}{n^4}\right)$ לכן $f(x)$ רציפה.

2. $\frac{n^2x}{1+n^7x^2}$ רציפות לכל x ולכל n וטור זה מתכנס במ"ש (תרגיל קודם) לכן $f(x)$ רציפה.

15

3. $\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x}$ רציפות לכל x ולכל n.

נשים לב שטור זה הוא טור טלסקופי, לכן:

$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ (סדרת הסכומים החלקיים)

$\sum f_n(x)$ לא מתכנסת במ"ש, לכן לא ניתן להשתמש במשפט קודם.

נבדוק פונקציה גבולית:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ x\in[0,1]}} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0$$

לכן: $f(x)=0$ כלומר $f(x)$ רציפה.

אינטגרביליות וגזירות:

משפט: אם $\sum_1^\infty f_n(x)$ מתכנס במ"ש בקטע $[a,b]$ לפונקציה $f(x)$ ו- $f_n(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ לכל n אזי:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \sum_1^\infty f_n(x)\,dx = \sum_1^\infty \int_a^b f_n(x)\,dx$$

משפט: אם לכל n, $f_n(x)$ בעלת נגזרת רציפה בקטע $[a,b]$ והטור $\sum_1^\infty f_n(x)$ מתכנס (לא צריך התנאי של התכנסות במ"ש) ל- $f(x)$ ו- $\sum_1^\infty f_n'(x)$ (טור הנגזרות) מתכנס במ"ש אזי:

16

$$f'(x) = \left(\sum_{1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{1}^{\infty} f_n'(x)$$

תרגיל: האם ניתן לבצע אינטגרציה איבר-איבר של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}$$ בקטע $[0,1]$.

פתרון: זהו טור טלסקופי, לכן:

$$S_n(x) = -x + x^{\frac{1}{2n+1}}$$

נחשב פונקציה גבולית:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} -x + x^{\frac{1}{2n+1}} = \begin{cases} 1-x & 0<x\leq 1 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$S(x)$ אינה רציפה, לכן טור זה לא מתכנס במ"ש.
כלומר לא ניתן להשתמש במשפט קודם, אבל:

$$\int_0^1 S(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

ומצד שני:

$$\sum_{1}^{\infty} \int_0^1 x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\,dx =$$

$$= \sum_{1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n+2} - \frac{2n-1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1/2$$

לכן האינטגרל של הסכום שווה לסכום האינטגרלים

תרגיל: חשב את $f'(x)$ כאשר:

1. $f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4}$, $x \in \mathbb{R}$

2. $f(x) = \sum_{1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

פתרון: 1. $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4}$ מתכנס, נבדוק התכנסות טור הנגזרות:

$$\left(\frac{\sin(nx)}{n^4}\right)' = \frac{\cos(nx)}{n^3}$$

הטור $\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$ מתכנס במ"ש, לפי ויירשטראס $\left(\left|\frac{\cos(nx)}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}\right)$

לכן:

$$f'(x) = \left(\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}\right)' = \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{\sin(nx)}{n^3}\right)' = \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$$

18

2. נבדוק התכנסות $\sum_{1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}$:

נשווה טור זה עם $\sum_{1}^{\infty} \frac{x}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}}{\frac{x}{n^2}}\right| \overset{\text{לופיטל, גוזרים לפי } n}{=} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{-2xn^{-3}}{1+\frac{x^2}{n^4}}}{-2xn^3}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{x^2}{n^4}} = 1$$

ידוע ש- $\sum_{1}^{\infty} \frac{x}{n^2}$ מתכנס לכל x, לכן הטור הנבדק מתכנס. נבדוק התכנסות טור הנגזרות:

$$\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}\right)' \overset{(\text{גוזרים לפי } x)}{=} \frac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{x^2}{n^4}} = \frac{n^2}{n^4+x^2}$$

טור זה מתכנס במ"ש לפי ויירשטרס: $\left(\left|\frac{n^2}{n^4+x^2}\right| \le \frac{1}{n^2}\right)$

לכן:

$$f'(x) = \sum_{1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}\right)' = \sum_{1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+x^2}$$

(1)

אוניברסיטת חיפה
תדו"א ב' - תרגול מס'
אפלאס עפרים

טורי חזקות
+ רדיוס התכנסות ותחום התכנסות
+ טורים שמושים
+ התכנסות במ"ש

הגדרה: טור מהצורה:

$$\sum_0^\infty a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$ כאשר $\forall i, a_i \in \mathbb{R}$

נקרא טור חזקות ממשי.

טור מהצורה:

$$\sum_0^\infty a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$$ נקרא גם טור חזקות.

לשים לב שע"י הצבת $t=x-x_0$ נקבל את הטור הראשון.

משפט: אם טור $\sum_0^\infty a_n x^n$ מתכנס בנקודה x_0 אזי הוא מתכנס לכל x המקיים: $|x|<x_0$.

הגדרה: אוסף כל הנקודות x_0 שמתכנס בהם טור חזקות נקרא תחום ההתכנסות של $\sum_0^\infty a_n x^n$.

הגדרה: הסופרמום של תחום ההתכנסות נקרא רדיוס ההתכנסות, ומסומן ב- R.

לשים לב שאם $R=0$ אזי $\sum_0^\infty a_n x^n$ מתכנס רק בנקודה $x_0=0$.

ואם $R\neq 0$ אזי $\sum_0^\infty a_n x^n$ מתכנס לכל $|x|<R$, ואם $R=\infty$ אזי $\sum_0^\infty a_n x^n$ מתכנס לכל x ממשי.

משפט: רדיוס ההתכנסות של $\sum_0^\infty a_n x^n$ שווה ל-

(מבחן השורש):
$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

(מבחן המנה):
$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

(2)

תרגיל: מצא את רדיוס ההתכנסות ותחום ההתכנסות של:

1. $\sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
2. $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n} + \frac{n^3}{3^n}\right) x^n$
3. $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{4^n} (x+3)^n$
4. $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (4x-8)^n$

פתרון: 1. נשתמש במבחן המנה ונחשב את הגבול:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$$

לכן תחום ההתכנסות הוא כל $\mathbb{R}$.

2. נפריד טור זה לשני טורים: $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} x^n$, $\sum_{1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} x^n$ ונחשב רדיוס ההתכנסות לכל אחד מהם:

$$R_1 = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3^n} \cdot \frac{3^{n+1}}{(n+1)^3} = 3$$

$$R_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \cdot \frac{n+1}{\ln(n+1)} = 1$$

לכן רדיוס ההתכנסות של הטור הנבדק שווה $R = 1$.

נבדוק תחום התכנסות: נבדוק בקצוות, עבור $x=1$:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} + \frac{n^3}{3^n}$$

$\sum_{1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ מתבדר בהשוואה עם $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$, לכן, הטור הנבדק מתבדר עבור $x=1$.

(3)

נבדוק עבור $x=-1$:

טור זה מתכנס:
$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} + (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$$

מתכנס, טור לייבניץ

מתכנס כי רדיוס ההתכנסות של חלק זה שווה 3

סה"כ תחום ההתכנסות הוא: $[-1,1)$.

3. נציב $t=x+3$ ונקבל:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{4^n} t^n$$

נחשב רדיוס התכנסות:

$$R_t = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{4^n}\cdot\frac{4^{n+1}}{n+1} = 4$$

כלומר רדיוס ההתכנסות שווה ל- 4.
לכן טור זה מתכנס לכל x המקיים: $-4<x+3<4$

כלומר:
$$-7<x<1$$

נבדוק תחום ההתכנסות: עבור $x=1$:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n}\cdot 4^n$$

טור זה מתבדר, כי האיבר הכללי אינו שואף לאפס.

מאותה סיבה הטור מתבדר עבור $x=-7$:
$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n}(-4)^n = \sum_{1}^{\infty} n$$

לכן תחום ההתכנסות הוא: $-7<x<1$.

4. נשתמש במבחן השורש:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}}=\frac{1}{2}$$

לכן $|4x-8|<\frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{2}<4x-8<\frac{1}{2}$$

$$\frac{15}{2}<4x<\frac{17}{2}$$

$$\frac{15}{8}<x<\frac{17}{8}.$$

נמצא תחום התכנסות: עבור $x=\frac{17}{8}$:

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\left(\frac{17}{8}-8\right)^n=\sum_{1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\cdot\frac{1}{2^n}=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

טור זה מתבדר. נבדוק עבור $x=\frac{15}{8}$:

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\left(\frac{15}{8}-8\right)^n=\sum_{1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\cdot\frac{(-1)^n}{2^n}=\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

טור לייבניץ מתכנס.

סה"כ: תחום ההתכנסות של טור זה הוא:

$$\frac{15}{8}\le x<\frac{17}{8}$$

טורים שימושיים:

משפט היחידות: אם $f(x)$ ניתן לפתח לשני טורים:

$\sum_0^\infty a_n(x-x_0)^n$ ו- $\sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ בסביבת x_0.

אזי: $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ לכל n טבעי.

כלומר בסביבת x_0 טור החזקות חייב להיות טור טיילור.

טורי מקלורן שימושיים:

1. $e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$
2. $\cos x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$
3. $\sin x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$
4. $\ln(1+x) = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, $-1 < x \leq 1$
5. $\operatorname{arctg} x = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $|x| \leq 1$
6. $\frac{1}{1-x} = \sum_0^\infty x^n$, $|x| < 1$

תרגיל: פתח את $f(x)$ לטור חזקות בתחום D, כאשר:

1. $f(x)=e^{2x-3}$, $D:=\mathbb{R}$.

2. $f(x)=\ln(1+x)$, $D:=|x-2|<3$

3. $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $D:=|x+3|<4$

פתרון: .1

$$e^{2x-3}=\frac{e^{2x}}{e^{3}}=\frac{1}{e^{3}}\cdot\sum_{0}^{\infty}\frac{2^{n}x^{n}}{n!}=\sum_{0}^{\infty}\frac{2^{n}x^{n}}{e^{3}n!}$$

.2

$$\ln(1+x)=\ln(1+2+x-2)=\ln(3+x-2)=$$

$$=\ln 3\left(1+\frac{x-2}{3}\right)=\ln 3+\ln\left(1+\frac{x-2}{3}\right)$$

ידוע ש- $|x-2|<3$ לכן $\left|\frac{x-2}{3}\right|<1$, כלומר:

$$\ln(1+x)=\ln 3+\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\,3^{n}}(x-2)^{n}$$

.3

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1+3-(x+3)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+3}{4}} =$$

$|x+3|<4$

לכן: $\left|\frac{x+3}{4}\right|<1$ נשתמש בפיתוח טור גיאומטרי:

$$= \frac{1}{4}\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{4^n}\cdot(x+3)^n = \sum_{0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{4^{n+1}}$$

תרגיל: חשב את סכום כל טור מהבאים:

1. $\sum_{0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{e^3 n!}$

2. $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n3^n}$

פתרון: 1. ראינו בתרגיל קודם ש-

$$e^{2x-3} = \sum_{0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{e^3 n!}$$

אם נציב $x=2$, נקבל:

$$e^{2\cdot 2-3} = e = \sum_{0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{e^3 n!}$$

2. באופן דומה:

$$\ln(1+x) = \ln 3 + \sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n3^n}(x-2)^n$$

עבור $x=3$:

$$\ln 4 - \ln 3 = \sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n3^n}$$

סה"כ:

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n3^n} = \ln\frac{4}{3}$$

8

התכנסות במ"ש

משפט: אם טור חזקות $\sum_0^\infty a_n x^n$ עם רדיוס התכנסות R, מתבדר בקצה (עבור $X=R$ או $X=-R$) אזי התכנסות הטור בתחום $(-R,R)$ איננה במ"ש.

משפט: טור חזקות $\sum_0^\infty a_n x^n$ עם רדיוס התכנסות R, מתכנס במ"ש בכל תת-קטע סגור $[a,b]$ שכולו נמצא בתחום $(-R,R)$.

מסקנות: אם R רדיוס ההתכנסות של הטור: $f(x)=\sum_0^\infty a_n x^n$, אזי:

1.
$$\int_0^x f(s)ds = \int_0^x \sum_0^\infty a_n s^n ds = \sum_0^\infty \int_0^x a_n s^n ds$$
$$= \sum_0^\infty \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$
כלומר ניתן לעשות אינטגרציה איבר-איבר.

2.
$$f'(x) = \left(\sum_0^\infty a_n x^n\right)' = \sum_0^\infty (a_n x^n)' = \sum_0^\infty n a_n x^{n-1}$$
כלומר גוזרים איבר-איבר.

רדיוס ההתכנסות של טור הנגזרות וטור האינטגרלים שווה ל- R.
ואם טור החזקות מתכנס בקצה (ב- $X=R$ או $X=-R$) אזי גם טור האינטגרלים מתכנס בקצה.
ואם טור הנגזרות מתכנס בקצה אזי גם טור החזקות מתכנס בקצה.

(9)

תרגיל: כתוב את $f(x)$ בצורה מפורשת, כאשר:

1. $$f(x)=\sum_{1}^{\infty} n x^{n-1}$$

2. $$f(x)=\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{2n-1}$$

פתרון: 1. נשתמש בהצגת טור גיאומטרי:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{0}^{\infty} x^{n} \quad , \quad |x|<1$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\sum_{0}^{\infty} n x^{n-1}$$

לכן:

$$\sum_{0}^{\infty} n x^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^{2}} \quad , \quad |x|<1$$

2. נשתמש בהצגת הטור הגיאומטרי:

$$\frac{1}{1+x^{2}}=\sum_{0}^{\infty}(-1)^{n} x^{2n}=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1} x^{2n-2}=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1} x^{2n-2}$$

$$\int \frac{1}{1+x^{2}} dx=\operatorname{arctg} x=\sum_{1}^{\infty} \int(-1)^{n+1} x^{2n-2} dx=\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{2n-1}$$

סה"כ:

$$\operatorname{arctg} x=\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{2n-1}$$

(10)

תרגיל: מצא את סכום הטורים הבאים:

1. $\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$

2. $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4^n}$

3. $\sum_{1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$

פתרון: 1. נגדיר: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad , \quad |x| < 1$$

$$\int f(x)dx = \operatorname{arctg} x = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

לכן:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n\sqrt{3}}$$

סה"כ: $\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} = \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$

11

2. נגדיר

$$f(x)=\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{n\,x^n}{4^n}$$

$$f(x)=\sum_1^\infty (-1)^{n-1} n\left(\frac{x}{4}\right)^n=\left(-\sum_1^\infty\left(\frac{-x}{4}\right)^n\right)'=-\left(\frac{-x}{4}+\frac{x^2}{4^2}-\frac{x^3}{4^3}+\cdots\right)'$$

$$=\left(+\frac{x}{4}\left(1-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{4^2}-\cdots\right)\right)'=\left(\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{4}}\right)'=\left(\frac{x}{4+x}\right)'$$

$$=\frac{4}{(4+x)^2}$$

לכן:

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{n}{4^n}=f(1)=\frac{4}{(4+1)^2}=\frac{4}{25}$$

3.

נגדיר:

$$f(x)=\sum_1^\infty (2n-1)x^{2n-2}$$

$$\int f(x)\,dx=\sum_1^\infty x^{2n-1}$$

$$=\sum_0^\infty x^{2n+1}=\sum_0^\infty x(x^2)^n=\frac{x}{1-x^2}\quad,\ |x|<1$$

לכן:

$$f(x)=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

כלומר:

$$\sum_1^\infty \frac{2n-1}{2^n}=2^{-1}\cdot f\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)=2^{-1}\cdot\frac{1+\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2}=3$$

1

אוניברסיטת חיפה
חדו"א ב' - תרגול מס' 1
אלהאם עפריה

פונקציות של מס' משתנים
- גבולות
- רציפות
- נגזרות חלקיות
- דיפרנציאביליות

הגדרה: תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ העתקה המוגדרת בקבוצה $D\subseteq\mathbb{R}^n$. אם לכל $(x_1,\dots,x_n)=\bar{X}\in D$ f מתאימה תמונה יחידה ב- $\mathbb{R}$. אז f נקראת פונקציה סקלרית של מס' משתנים.

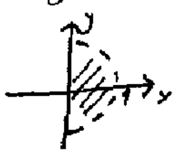
דוגמא: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2y$; $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $g(x,y,z)=x-yz$

תרגיל: מצא תחום הגדרת הפונקציות הבאות:

1. $f(x,y)=\sqrt{x}+\ln(1-x^2-y^2)$
2. $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{1-x-y}{1+x+y}}$

פתרון: 1. $x\geq 0$ וגם $1-x^2-y^2>0$ $\Leftarrow$ $x\geq 0 \cap 1\geq x^2+y^2$

כלומר תחום ההגדרה הוא:



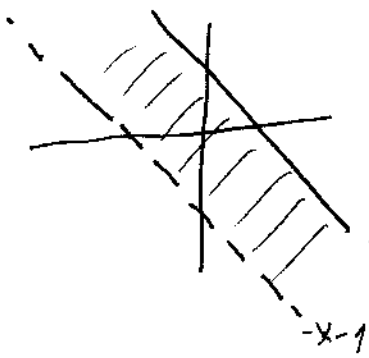
חצי ימני של מעגל היחידה הפתוח.

2. $1+x+y\neq 0$ וגם $\dfrac{1-x-y}{1+x+y}\geq 0$ $\Leftarrow$ $1-x-y\geq 0 \cap 1+x+y>0$

או $1-x-y\leq 0 \cap 1+x+y<0$

כלומר: $1-x\geq y$ וגם $y>-x-1$

או $1-x\leq y$ וגם $y<-x-1$:



סה"כ: $1-x\geq y$ וגם $y>-x-1$

$1-x\geq y>-x-1$

גבולות

הגדרה: אומרים ש- l הוא גבול הפונקציה $f(\vec{x})$ כאשר:
$\vec{x}\to\vec{x}_0$, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$, כך שלכל נקודה $\vec{x}$ המקיימת:
$0<d(\vec{x},\vec{x}_0)<\delta$ מתקיים: $|f(\vec{x})-l|<\varepsilon$. כאשר $d(\vec{x},\vec{x}_0)$ זה המרחק בין
$\vec{x}$ ל- $\vec{x}_0$.

הגדרת הגבול לפי היינה: l נקרא גבול הפונקציה $f(\vec{x})$ כאשר $\vec{x}\to\vec{x}_0$ אם לכל
סדרת משתנים $\{\vec{w}_n\}\neq\vec{x}_0$ המתכנסת לנקודה $\vec{x}_0$, סדרת התמונות:
$f(\vec{w}_1),\dots,f(\vec{w}_n),\dots$ מתכנסת לגבול l.

תרגיל: הוכח שהגבול הבא אינו קיים:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

פתרון: הרעיון הוא שעבור שני מסלולים שונים המתכנסים ל- $(0,0)$ נקבל גבולות שונים:
נבחר מסלול $x=y$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+x^2}=0$$

נבחר מסלול אחר: $y=\sqrt{x}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}$$

לכן הגבול אינו קיים.

תרגיל: הוכח שהגבול: $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$ אינו קיים.

פתרון: נבחר מסלול כללי: $y=kx$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

ברור שהגבול תלוי ב- k, לכן עבור ערכים שונים של k נקבל
גבולות שונים, כלומר הגבול אינו קיים.

3

שיטות חישוב גבולות:

משפט הסנדביץ':

אם עבור הפונקציות: $h,g,f: D\to\mathbb{R}$

$\forall\bar{x}\in D$ מתקיים: $h(\bar{x})\le g(\bar{x})\le f(\bar{x})$ ונתון ש-

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} h(\bar{x}) = \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = l$$

אזי: $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} g(\bar{x}) = l$.

תרגיל: חשב:

1. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^2+y^4}$

2. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{x^4+y^4+z^4}{x^2+y^2+z^2}$

3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} y\sin\frac{1}{x-1}$

פתרון:

.1

$$0\le\left|\frac{x^2y}{x^2+y^4}\right|\le\left|\frac{x^2y}{x^2}\right| = |y|\to 0$$

לכן הגבול שווה לאפס.

.2

$$0 \le \left|\frac{x^4+y^4+z^4}{x^2+y^2+z^2}\right| \le \left|\frac{x^4}{x^2+y^2+z^2}\right| + \left|\frac{y^4}{x^2+y^2+z^2}\right| + \left|\frac{z^4}{x^2+y^2+z^2}\right|$$

$$\le \left|\frac{x^4}{x^2}\right| + \left|\frac{y^4}{y^2}\right| + \left|\frac{z^4}{z^2}\right| = x^2+y^2+z^2 \to 0$$

לכן הגבול שווה לאפס

.3

$$\underset{\to 0}{-y} \le y \sin\frac{1}{x-1} \le y \to 0$$

לכן הגבול אפס

שיטת ההצבה:

תרגיל: חשב את הגבולות:

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\frac{\pi}{2})} \left(1-\cos(x+y)\right)^{tg(x+y)}$

(5) **פתרון:** 1. נציב $x^2+y^2=t$ ברור שאם $(x,y)\to(0,0)$

אז $t\to 0$ לכן:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = 1$$

2. נציב: $t=\cos(x+y)$ ברור שאם: $(x,y)\to(0,\pi/2)$

אז $t\to 0$ לכן:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to \frac{\pi}{2}}} \left(1-\cos(x+y)\right)^{tg(x+y)} = \lim_{t\to 0}\left((1-t)^{\frac{1}{t}}\right)^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to\frac{\pi}{2}}} \sin(x+y)}$$

$$= e^{-1}$$

רציפות: תהי $f: D\to\mathbb{R}$ פונקציה של מס' משתנים.

f רציפה בנקודה $\vec{x}_0$ אם: $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$

דוגמא:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

רציפה.

6

תרגיל: בדוק רציפות הפונקציות הבאות:

1. $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ ב- $(0,0)$

2. $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(y-2)}{(x-1)^2+\sin^2(y-2)} & (x,y)\neq(1,2)\\ 0 & (x,y)=(1,2)\end{cases}$$ ב- $(1,2)$

פתרון: 1.

$$0\leq\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leq\left|\frac{x^2y}{x^2}\right|=|y|\to 0$$

לכן $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=f(0,0)=0$$

כלומר f רציפה ב- $(0,0)$

2. נציב $x'=x-1$, $y'=y-2$ ונקבל:

$$\frac{(x-1)(y-2)}{(x-1)^2+\sin^2(y-2)}=\frac{x'y'}{x'^2+\sin^2 y'}$$

נחשב את הגבול:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \frac{(x-1)(y-2)}{(x-1)^2+\sin^2(y-2)} = \lim_{\substack{x'\to 0\\ y'\to 0}} \frac{x'y'}{x'^2+\sin^2(y')}$$

$$= \lim_{\substack{x'\to 0\\ y'=Kx'}} \frac{K x'^2}{K^2x'^2+\sin^2(Kx'^2)} = \frac{K}{K^2+1}$$

לכן f אינה רציפה ב- $(x',y')=(0,0)$

כלומר אינה רציפה ב- $(x,y)=(1,2)$

נגזרות חלקיות

הגדרה: תהי $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ המוגדרת בתחום D.

הנגזרת החלקית של f לפי המשתנה x_i מוגדרת:

$$f'_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_1,\dots,x_i+\Delta x,x_{i+1},\dots x_n)-f(x_1,\dots,x_n)}{\Delta x}$$

הערה: הנגזרת החלקית לפי x_i היא נגזרת רגילה כאשר כל שאר המשתנים נחשבים כקבועים.

8

תרגיל: חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציות הבאות:

1. $f(x,y,z)=xe^{y}+\ln(z^2+1)$

2. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

3. $f(x,y)=e^{\cos(xy)}$

פתרון:

1. $f'_x=e^{y}\ ,\ f'_y=xe^{y}\ ,\ f'_z=\dfrac{2z}{z^2+1}$

2. $\forall(x,y)\neq(0,0):\quad f'_x=\dfrac{x^2(x^2+3y^2)}{x^2+y^2}$

$$f'_y=-\frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

עבור $(x,y)=(0,0)$:

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x-0}{\Delta x}=1$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0$$

סה"כ:

(9)

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x^2+3y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

.3

$$f'_x = -y\sin(xy)\, e^{\cos(xy)}$$

$$f'_y = -x\sin(xy)\, e^{\cos(xy)}$$

תרגיל: חשב: $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ כאשר:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

פתרון:

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0-0}{\Delta y} = 0$$

(10)

הערה: נשים לב ש- f אינה רציפה ב-$(0,0)$
לכן מקיום הנגזרות החלקיות של f לא נובעת רציפות.

דיפרנציאביליות

הגדרה: $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0) אם:

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = \Delta x f'_x(x_0,y_0) + \Delta y f'_y(x_0,y_0) + \rho\varepsilon$$

כאשר: $\rho = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ ו- $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon = 0$.

משפט: אם $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב-(x_0,y_0) אזי קיימות הנגזרות החלקיות f'_x, f'_y ב-(x_0,y_0).

משפט: אם $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב-(x_0,y_0) אזי היא רציפה באותה נקודה.

תרגיל: בדוק דיפרנציאביליות הפונקציה הבאה ב-$(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(11)

פתרון: נבדוק רציפות של f ב- $(0,0)$:

$$0 \le \left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le x^2+y^2 \longrightarrow 0$$

לכן f רציפה.

נמשיך נגזרות חלקיות ב- $(0,0)$:

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2}{\Delta x} \sin\frac{1}{|\Delta x|} = 0$$

$$f'_y(0,0) = 0$$

לכן:

$$\Delta f = (\Delta x^2 + \Delta y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \varepsilon\rho$$

נבדוק אם $\lim_{\rho \to 0} \varepsilon = 0$:

$$\varepsilon = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\,\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \xrightarrow[\Delta y \to 0]{\Delta x \to 0} 0$$

לכן f דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$.

12

משפט: אם f מוגדרת בסביבת (x_0,y_0) ובעלת נגזרות חלקיות f'_x, f'_y רציפות באותה נקודה אזי f דיפרנציאבילית ב- (x_0,y_0)

תרגיל: בדוק דיפרנציאביליות של f בכל נקודה:

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

פתרון: נחשב נגזרות חלקיות (f רציפה):

$$f_x(x,y)=\begin{cases} \frac{2x}{x^2+y^2}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f'_y(x,y)=\begin{cases} \frac{2y}{(x^2+y^2)^2}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

הנגזרות החלקיות רציפות בכל נקודה לכן f דיפרנציאבילית בכל נקודה.

כלל השרשרת
נגזרת מכוונת
וקטור הגרדיאנט

משפט: (כלל השרשרת) תהי $F(x_1,\dots,x_n):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות F'_{x_i} רציפות. ויהיו הפונקציות: $x_i(t_1,\dots,t_m)$ גזירות חלקית לפי t_j, $1\le j\le m$ אז קיימת הנגזרת $\frac{\partial F}{\partial t_j}$ ומתקיים:

$$\forall j:\quad \frac{\partial F}{\partial t_j}=\sum_{i=1}^{n}F'_{x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$$

תרגיל: חשב $\frac{\partial F}{\partial t}$ כאשר: $F(x,y)=xy$; $x=e^{2t}$, $y=\ln t^2$

פתרון:

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$=y\cdot 2e^{2t}+x\cdot\frac{2t}{t^2}=2e^{2t}\ln t+\frac{2e^{2t}}{t}$$

תרגיל: הוכח שהפונקציה $z=\varphi(x^2-y^2)$ כאשר $\varphi(t)$ גזירה מקיימת את המשוואה:

$$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

(2)

פתרון: נסמן: $t=x^2-y^2$ ונחשב z'_x, z'_y:

$$z'_x = \varphi'_x = \frac{\partial \varphi}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = 2x\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$z'_y = \varphi'_y = \frac{\partial \varphi}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} = -2y\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

נציב את התוצאה במשוואה ונקבל:

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy\frac{\partial \varphi}{\partial t} - 2xy\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

תרגיל: יהי $f(x,y)=xy$ ו- $x(u,v)=u-v$, $y(u,v)=vu^2$

חשב: $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$.

פתרון:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$= y\cdot 1 + x\cdot 2vu = vu^2 + (u-v)2uv$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = y\cdot(-1) + x u^2 = -vu^2 + (u-v)u^2$$

3

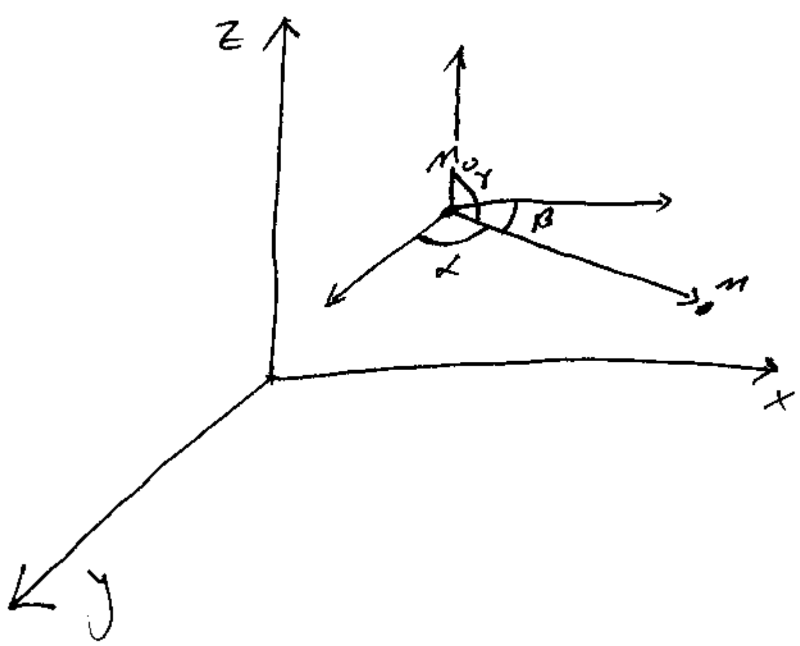
נגזרת מכוונת

* הערה: הנגזרות החלקיות הן נגזרות מכוונות (בכיוון הצירים)
נגזרת f'_x למשל היא נגזרת מכוונת בכיוון ציר ה- X.
נגדיר כעת נגזרת במרחב בכיוון כלשהו:

הגדרה: תהי $f(x,y,z)$ פונקציה מוגדרת בתחום D.
תהי $M_0(x_0,y_0,z_0)$ נקודה ב- D. הנגזרת המכוונת
בנקודה M_0 לכיוון הנקודה M מוגדרת ע"י הגבול:

$$\lim_{M\to M_0} \frac{f(M)-f(M_0)}{|\overrightarrow{M_0M}|}$$

כאשר $|\overrightarrow{M_0M}|$ זהו אורך הקטע המקשר בין M_0 ל-M:



(4)

נוסחה לחישוב נגזרת מכוונת:

נגדיר משוואות הישר M_0M בצורה פרמטרית:

$$M_0M: \begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\cos\beta \\ z = z_0 + t\cos\gamma \end{cases} \quad , \quad t \geq 0$$

נחשב אורך הקטע M_0M:

$$|M_0M| = \left[(x_0 + t\cos\alpha - x_0)^2 + (y_0 + t\cos\beta - y_0)^2 + (z_0 + t\cos\gamma - z_0)^2\right]^{1/2}$$

$$= \left[t^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)\right]^{1/2} = t$$

נסמן: $\psi(t) = f(x,y,z) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma)$

לכן: $$\lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{|\vec{M_0M}|} = \lim_{t \to 0} \frac{\psi(t) - \psi(0)}{t} = \psi'(0)$$

תרגיל: חשב את הנגזרת המכוונת של הפונקציה:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

בנקודה $(0,0)$ בכיוון: $\vec{a} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$

5

פתרון: נרשום משוואת הישר M_0M העובר דרך הנקודה $M_0(0,0)$ בכיוון a :

$$M_0M: \begin{cases} x = t\cos\alpha \\ y = t\sin\alpha \end{cases}$$

נגדיר פונקציה $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \frac{t^3\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha}{t^4\cos^4\alpha + t^2\sin^2\alpha} = \frac{t\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha + \sin\alpha}$$

נחשב את הנגזרת: $\varphi'(0)$:

$$\varphi'(0) = \frac{\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha} + t\cos^2\alpha\sin\alpha\cdot\left.\frac{-2t\cos^4\alpha}{(t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha)^2}\right|_{t=0}$$

$$= \frac{\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$$

כלומר $D_a f(0,0) = \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$, $\sin\alpha\neq 0$, אם $\sin\alpha=0$

מקבלים $\varphi(t)\equiv 0$, לכן $\varphi'(0)=0$.

6

<u>משפט:</u> אם $f(M)$ דיפרנציאבילית בסביבת הנקודה M_0

אזי הנגזרת המכוונת של $f(M)$ בנקודה M_0

לפי הכיוון $\overset{\text{וקטור יחידה}}{a}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ שווה ל-

$$D_a f(M_0)=f'_x(M_0)\cos\alpha+f'_y(M_0)\cos\beta+f'_z(M_0)\cos\gamma$$

<u>תרגיל:</u> חשב נגזרת הפונקציה : $f=x^2+3xyz$

בכיוון : $a=(2,3,-1)$ בנקודה $(1,-1,2)$.

<u>פתרון:</u> ננרמל את a :

$$\hat{a}=\frac{1}{|a|}\cdot a=\frac{1}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}}\cdot(2,3,-1)=\left(\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{-1}{\sqrt{14}}\right)$$

נחשב את הנגזרות החלקיות של f בנקודה $(1,-1,2)$:

$$f'_x(1,-1,2)=2x+3yz\Big|_{(1,-1,2)}=-4$$

$$f'_y(1,-1,2)=6\quad,\ f'_z(1,-1,2)=-3$$

סה"כ:

$$D_a f(1,-1,2)=-4\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+6\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}-3\cdot\frac{-1}{\sqrt{14}}=\frac{13}{\sqrt{14}}$$

וקטור הגרדיאנט

הגדרה: תהי $f(x,y,z)$ פונקציה עם נגזרות חלקיות בנקודה M_0.
הגרדיאנט של f בנקודה M_0 מוגדר ע"י:

$$\operatorname{grad} f(M_0) = \nabla f(M_0) = \left(f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0)\right)$$

משפט: הנגזרת המכוונת של f בנקודה M_0 מקבלת את הערך המקסימלי שלה בכיוון וקטור הגרדיאנט והערך המקסימלי שלה שווה לאורך וקטור הגרדיאנט.

תרגיל: מצא את הכיוון שבו קצב השתנות של הפונקציה הסקלרית: $f=\ln(x^2+y^2+z^2)$ בנקודה $M_0(1,2,1)$ הוא מקסימלי.
ומצא את הערך המקסימלי של הנגזרת המכוונת ב-M_0

פתרון: הכיוון הנדרש הוא:

$$\nabla f = (2x, 2y, 2z)\cdot\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\Bigg|_{(1,2,1)} = \frac{2}{6}(1,2,1)$$

והערך המקסימלי של $D_a f(M_0)$:

$$\max D_a f(M_0) = \left|\frac{1}{3}(1,2,1)\right| = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{1+4+1} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

8

תרגיל: מצא את הגרדיאנט של:

$$f(x,y,z)=xe^{x^2+y^2+z^2}$$

בנקודה $(0,0,0)$

פתרון:

$$\nabla f(0,0,0)=\left(f'_x,f'_y,f'_z\right)\Big|_{(0,0,0)}=$$

$$=\left(e^{x^2+y^2+z^2}+2x^2e^{x^2+y^2+z^2},\ 2yxe^{x^2+y^2+z^2},\ 2zxe^{x^2+y^2+z^2}\right)$$

$$=(1,0,0)$$