לואי עבדאללה
אסלאם עכריה

מתמטיקה להצטיינות

צעד ראשון

רקע הכרחי לכל קורסי המתמטיקה הבסיסיים בכל האוניברסיטאות והמכללות.

כולל עשרות דוגמאות עם פתרונות מלאים להטמעה מיטבית של החומר.

هذا الإصدار برعاية جمعية اقرأ لدعم التعليم في المجتمع العربي
ספר זה יצא לאור ע"י עמותת אקראא

אסלאם עכריה
לואי עבדאללה

מתמטיקה

צעד ראשון להצטיינות

אני מקדיש עבודה צנועה זאת לשתי הנסיכות שלי פאטמה ושרה.

אסלאם עכריה

אני מקדיש ספר זה לילדי המופלאים, יחיא וכמיל. אני אוהב את שניכם מאוד.

לואי עבדאללה

ספר זה נמצא באתרים http://math.haifa.ac.il/iakaria/

http://is.haifa.ac.il/~aLoai/

פתח דבר למהדורה ראשונה

זה הוא ספר של חומר מתמטי החשוב לכל סטודנט הלומד במשך התואר קורסי מתמטיקה, ספר זה מסביר הרבה טכניקה וחומר הנחשב בסיסי בעיני המרצה, אומנם קשה לסטודנטים. אנחנו הקדשנו מאמץ רב בבחירת הדוגמאות והתרגילים, כמו כן השקענו המון זמן בפתרון ודאגנו לפתור את כל תרגיל באופן מלא. עם זאת, אנחנו נשמח לקבל הערות, הארות ושאלות בדוא"ל:

iakaria@math.haifa.ac.il או aLoai@is.haifa.ac.il

לבסוף, ברצוננו להודות לעמותת אקראא על תמיכתה בהוצאת ספר זה לאור.

בהצלחה לכולנו בהמשך הדרך!

אסלאם עכריה

לואי עבדאללה

תוכן עניינים

מבוא: קבוצות מיוחדות של מספרים ממשיים

פרק I: טכניקה אלגברית

פרק II: פונקציות

פרק III: נושאים נוספים

האלף-בית היווני

$\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}$ אלפא ***alpha***

$\mathbf{B}, \boldsymbol{\beta}$ בתא ***beta***

$\mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\gamma}$ גמא ***gamma***

$\mathbf{\Delta}, \boldsymbol{\delta}$ דלתא ***delta***

$\mathbf{E}, \boldsymbol{\epsilon}$ אפסילון ***epsilon***

$\mathbf{Z}, \boldsymbol{\zeta}$ זטא ***zeta***

$\mathbf{H}, \boldsymbol{\eta}$ אטא ***eta***

$\mathbf{\Theta}, \boldsymbol{\theta}$ תטא ***theta***

$\mathbf{I}, \boldsymbol{\iota}$ יוטא ***iota***

$\mathbf{K}, \boldsymbol{\kappa}$ קפא ***kappa***

$\mathbf{\Lambda}, \boldsymbol{\lambda}$ למדא ***lampda***

$\mathbf{M}, \boldsymbol{\mu}$ מיו ***mu***

$\mathbf{N}, \boldsymbol{\nu}$ ניו ***nu***

$\mathbf{\Xi}, \boldsymbol{\xi}$ קסי ***xi***

$\mathbf{O}, \boldsymbol{o}$ אומיקרון ***omicron***

$\mathbf{\Pi}, \boldsymbol{\pi}$ פאי ***pi***

$\mathbf{P}, \boldsymbol{\rho}$ רו ***rho***

$\mathbf{\Sigma}, \boldsymbol{\sigma}$ סיגמא ***sigma***

$\mathbf{T}, \boldsymbol{\tau}$ טאו ***tau***

$\mathbf{\Upsilon}, \boldsymbol{\upsilon}$ אופסילון ***upsilon***

$\mathbf{\Phi}, \boldsymbol{\phi}$ פי ***phi***

$\mathbf{X}, \boldsymbol{\chi}$ כי ***chi***

$\mathbf{\Psi}, \boldsymbol{\psi}$ פסי ***psi***

$\mathbf{\Omega}, \boldsymbol{\omega}$ אומיגה ***omega***

מבוא:
קבוצות מיוחדות של
מספרים ממשיים

קבוצות של מספרים ממשיים

קבוצה היא אוסף של עצמים הנקראים "האיברים של הקבוצה". אנו נתמקד בקבוצות של מספרים ממשיים. קבוצה מסומנת בדרך ע"י אות לטינית גדולה A, B, C. את איברי הקבוצה נהוג לסמן באותיות קטנות a, b, c. אם a איבר בקבוצה A אז נאמר ש- a שייך ל A ומסמנים: $a \in A$. ואם a אינו איבר ב A אז נאמר ש- a אינו שייך ל A ומסמנים: $a \notin A$. חשוב לציין כי קיימות שיטות שונות להצגת קבוצות.

דוגמא: תהי A קבוצת מספרים חיוביים זוגיים. ניתן להציגה בכמה דרכים:

1. $A = \{$היא קבוצת המספרים הזוגיים החיוביים$\}$
2. $A = \{2,4,6, \cdots\}$
3. $A = \{2k | k = 1,2,3, \cdots\}$. (A כל המספרים מהצורה $2k$ כאשר k הוא מספר שלם חיובי.

להלן כמה דוגמאות לקבוצות של מספרים:

- קבוצת המספרים הטבעיים (שלמים חיוביים):
$$\mathbb{N} = \{1,2,3, \cdots, n, \cdots\}$$
- קבוצת המספרים השלמים:
$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$$
- קבוצת המספרים הרציונליים: (מספר רציונלי הוא מספר שניתן לכתובו במנה של שני שלמים):
$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$$
- קבוצת המספרים הממשיים: $\mathbb{R}$
- קבוצת המספרים האי-רציונליים: $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ זוהי קבוצת המספרים הממשיים שאינם מספרים רציונליים. לדוגמא: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$

נוכיח לדוגמא כי $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ הוא מספר אי-רציונאלי:

הוכחה: נניח בשלילה כי $\sqrt{2}$ רציונלי, לכן קיימים $m, n \neq 0$ שלמים כך ש $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.

נניח כי $\frac{m}{n}$ הוא שבר מצומצם (אחרת היינו מצמצמים עד שניגיע לשבר מצומצם) כלומר m ו n זרים (אין מספר שמחלק את שניהם).

אבל אם $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ אז $2 \cdot n^2 = m^2$.

לכן m^2 זוגי, מכאן m זוגי, אבל אם m מתחלק ב 2 אז m^2 מתחלק ב 4 לכן גם $2 \cdot n^2$ מתחלק ב 4 כלומר n^2 מתחלק ב 2 לכן n זוגי. סה"כ m ו n שני מספרים זוגים, סתירה לזה שהם זרים. לכן ההנחה שלנו אינה נכונה, כלומר $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ∎

עוד קבוצות שימושיות:

קטע פתוח: $(x_1,x_2)=\{x\in\mathbb{R}|x_1<x<x_2\}$ כל הממשיים בין x_1 ו- x_2 לא כולל.

קטע סגור: $[x_1,x_2]=\{x\in\mathbb{R}|x_1\le x\le x_2\}$ כל הממשיים בין x_1 ו- x_2 כולל.

קטע חצי סגור חצי פתוח: $[x_1,x_2)=\{x\in\mathbb{R}|x_1\le x<x_2\}$

קטע חצי פתוח חצי סגור: $(x_1,x_2]=\{x\in\mathbb{R}|x_1<x\le x_2\}$

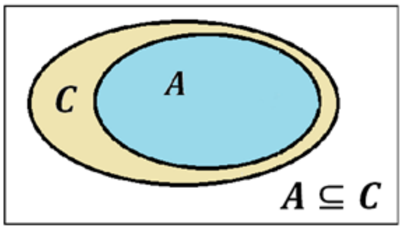
סביבת ε של x_0: $B(x_0,\varepsilon)=\{x\in\mathbb{R}|x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon\}$ כל הממשיים שמרחקם מ- x_0 קטן מ- ε (אפסילון, נשתמש באות זאת לתאר מספר חיובי מאוד קטן)

הערה: אי-שוויון זה: $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$ שקול לאי-שוויון: $|x-x_0|<\varepsilon$. לכן אנחנו בהמשך נשתמש באי-שוויון האחרון לתאר את כל ה-x-ים הנמצאים בסביבת ε של x_0.

יחסים בין קבוצות

נגדיר בשורות הבאות יחסים בסיסיים בין קבוצות, ונתאר חלק מהם באמצעות דיאגראמות וון[1].

הגדרה: נאמר כי קבוצה A מוכלת בקבוצה C (או A היא תת-קבוצה של C) אם כל איבר שייך ל- A הוא שייך גם ל- C. בשפה מתמטית: $\forall x\in A\Longrightarrow x\in C$ (סימון זה $\forall x$ משמעתו לכל x)., מסמנים יחס זה ע"י $A\subseteq C$:



דוגמא: $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$, $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$.

הערה: מההגדרה של הכלה נובע כי כל קבוצה מוכלת בעצמה.

הקבוצה הריקה[2] $\{\ \}$ מוכלת בכל קבוצה, כי תנאי ההכלה מתקיים באופן רק.

הגדרה: שוויון קבוצות: קבוצה A שווה לקבוצה B אס"ם[3] בשתי הקבוצות יש בדיוק אותם איברים. או בשפה מתמטית: $A=B\Leftrightarrow(\forall x\colon x\in A\Leftrightarrow x\in B)$.

---

[1] דיאגראמת וון נקראת על שמו של ג'ון וון, מתמטיקאי ופילוסוף בריטי.

[2] נהוג גם לסמן את הקבוצה הריקה באות פי ϕ

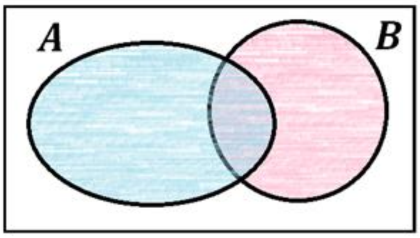
[3] אס"ם או אם ורק אם הוא ביטוי לוגי בין שתי טענות השקולות אחת לשנייה במובן שהאחת אמיתית כשהשנייה אמיתית ולהפך.

משפט: קבוצה A שווה לקבוצה B אס"ם ($A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$).

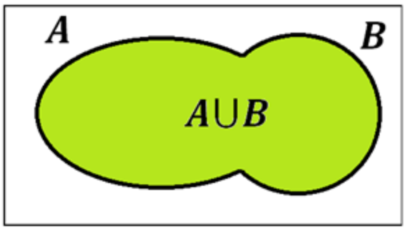
דוגמא: עבור הקבוצות $C = \{1,2\}$, $B = \{3,1,2\}$, $A = \{1,2,3\}$ מתקיים:

$$A = B, A \neq C$$

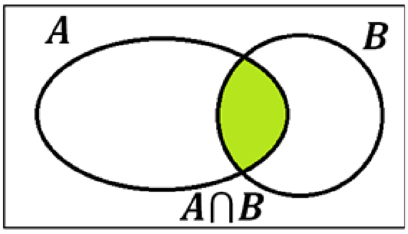
הגדרה: תהיינה A ו B שתי קבוצות,



איחוד שתי קבוצות A, B היא קבוצת כל האיברים השייכים ל- A או ל- B או לשתיהן ביחד.
ומסמנים ע"י $A \cup B$. כלומר: $A \cup B = \{x | x \in A$ או $x \in B\}$.



הגדרה: חיתוך שתי קבוצות A, B היא קבוצת כל האיברים השייכים ל- A וגם ל- B.
ומסמנים ע"י $A \cap B$. כלומר: $A \cap B = \{x | x \in A$ וגם $x \in B\}$.



דוגמא: עבור שתי הקבוצות $B = \{1,2,5\}$, $A = \{1,2,3\}$ מתקיים:

$$A \cup B = \{1,2,3,5\} \ , A \cap B = \{1,2\}$$

דוגמא: $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \quad , \quad \mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z} \quad , \quad \mathbb{N} \cap (-\infty, 0] = \phi$

תכונות של קבוצות

הגדרה: קבוצה סופית היא קבוצה שמספר איבריה סופי.

קבוצה אינסופית היא קבוצה שמספר איבריה אינסופי.

דוגמא: $\mathbb{N},\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{R}$, קבוצת הזוגיים, $A=\{x\in\mathbb{R}|x>1000\}$ הן קבוצות אינסופיות.
אבל הקבוצה $B=\{1,2,3,4\}$ היא קבוצה סופית כי יש בה בסה"כ 4 איברים.

תרגיל: הוכח כי קבוצת המספרים הראשונים[1] הינה קבוצה אינסופית.

פתרון: נניח בשלילה כי יש מספר סופי של ראשונים: $p_1,p_2,\cdots,p_k$.

המספר: $p=p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdots p_k+1$ אינו מתחלק באף מספר ראשוני, כלומר לא ניתן להציג אותו כמכפלה של שני טבעיים והוא גם גדול מאחד, לכן הוא ראשוני, סתירה לזה שהמספרים הראשונים הם רק $p_1,p_2,\cdots,p_k$. ■

צפיפות המספרים הרציונליים והאי-רציונליים

משפט: בין כל שני מספרים ממשיים שונים קיים מספר רציונלי וגם מספר אי-רציונלי.
לצורך הוכחת משפט זה נגדיר את המושג ערך שלם ונוכיח טענת עזר:

הגדרה: יהי x מספר ממשי כלשהו, הערך השלם של x הוא המספר השלם הגדול ביותר שקטן או שווה ל- x. מסמנים ע"י: $[x]$ או $\lfloor x\rfloor$.

דוגמא: $\lfloor 2.3\rfloor=2\ \ ,\ \ \lfloor -2.3\rfloor=-3\ ,\ \ \lfloor 2\rfloor=2$

טענת עזר: לכל $x>0$ ממשי קיים n טבעי כך ש- $0<\frac{1}{n}<x$.

הוכחת הטענה: יהי x ממשי חיובי כלשהו, נגדיר את המספר הבא: $n=\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor+1$.

x הוא חיובי, לכן n שלם חיובי, כלומר n טבעי, ומתקיים: $\frac{1}{x}<\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor+1=n$,

מכאן: $\frac{1}{x}<n$ שזה שקול ל- $\frac{1}{n}<x$. כיוון שהבחירה של x הייתה שרירותית אז הטענה נכונה לכל x ממשי חיובי. ■

הוכחת המשפט: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ נניח בה"כ (בלי הגבלת הכלליות[2]) ש- $a<b$ ונוכיח שקיים ביניהם מספר רציונלי וגם מספר אי-רציונלי:

הנחנו ש- $a<b$ לכן $0<b-a$ אז לפי טענת עזר קיים n טבעי כך $\frac{1}{n}<b-a$. ולכן נבחר n המקיים את אי השוויון הזה. ובנוסף נבחר m השלם הקטן ביותר המקיים: $a<\frac{m}{n}$.
מאי שוויון זה נובע את האי שוויון הבא: $\frac{m-1}{n}<a<\frac{m}{n}$. ולכן:

$$a<\frac{m}{n}=\frac{m}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{m-1}{n}+\frac{1}{n}<a+(b-a)=b$$

---

[1] מספר ראשוני הוא מספר טבעי גדול מ-1, שלא ניתן להציגו כמכפלה של שני מספרים טבעיים קטנים ממנו.
[2] ביטוי זה משמש תמיד לציין שאנחנו מניחים הנחה נוספת מבלי שנקטין את קבוצת המקרים שבהם אנחנו מטפלים.

סה"כ: $a < \frac{m}{n} < b$.

$\frac{m}{n}$ הוא המספר הרציונלי שמחפשים.

על מנת למצוא מספר אי-רציונלי נחזור על אותו תהליך עם $\frac{\sqrt{2}}{n}$ במקום $\frac{1}{n}$, כלומר נבחר n המקיים:

$\frac{\sqrt{2}}{n} < b - a$ (לפי טענת עזר קיים n כזה עבור המספר $x = \frac{b-a}{\sqrt{2}}$). שוב נבחר m שלם המקיים:

$\frac{\sqrt{2}(m-1)}{n} < a < \frac{\sqrt{2}m}{n}$ ונקבל:

$$a < \frac{\sqrt{2}m}{n} = \frac{\sqrt{2}m}{n} - \frac{\sqrt{2}}{n} + \frac{\sqrt{2}}{n} = \frac{\sqrt{2}(m-1)}{n} + \frac{\sqrt{2}}{n} < a + (b-a) = b$$

סה"כ: $a < \frac{\sqrt{2}m}{n} < b$. $\frac{\sqrt{2}m}{n}$ הוא המספר האי-רציונלי שמחפשים. ■

מסקנה: בין כל שני מספרים ממשיים שונים, קיימים אינסוף מספרים רציונליים ואינסוף מספרים אי-רציונליים.

הגדרה: קבוצת מספרים ממשיים A נקראת צפופה $(dense)$ בקבוצת מספרים ממשיים B אם בין כל שני מספרים שונים ב- B קיים מספר השייך ל- A .

מסקנה: קבוצת המספרים הרציונלים צפופה ב- $\mathbb{R}$.

מסקנה: קבוצת המספרים האי-רציונלים צפופה ב- $\mathbb{R}$.

תרגיל: הוכח כי $\mathbb{N}$ ו- $\mathbb{Z}$ אינן צפופות ב- $\mathbb{R}$.

פתרון: מספיק להראות שקיימים שני מספרים ממשיים שאין ביניהם אף מספר שלם או טבעי, נבחר למשל $\frac{1}{2}$ ו- $\frac{1}{3}$. וברור שאין ביניהם אף מספר שלם או טבעי.

קבוצות חסומות וקבוצות לא חסומות

הגדרה: קבוצת מספרים ממשיים A נקראת חסומה מלמעלה (או חסומה מלעיל) אם קיים מספר ממשי M כזה שלכל $a \in A$ מתקיים $a \le M$. המספר M נקרא מלעיל של A.

הגדרה: קבוצת מספרים ממשיים A נקראת חסומה מלמטה (או חסומה מלרע) אם קיים מספר ממשי m כזה שלכל $a \in A$ מתקיים $a \ge m$. המספר m נקרא מלרע של A .

הגדרה: קבוצת מספרים ממשיים A נקראת חסומה אם קיים M כזה שלכל $a \in A$ מתקיים $|a| \le M$. או המילים אחרות, קבוצה נקראת חסומה אם היא חסומה מלמעלה וגם מלמטה.

דוגמאות:

$\mathbb{N}$ חסומה מלמטה ואינה חסומה מלמעלה, ולכן אי אפשר לגיד שהיא קבוצה חסומה.

$\mathbb{Z}$ אינה חסומה מלמטה וגם אינה חסומה מלמעלה.

$A = \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ חסומה מלמטה ע"י 0 (כי היא חיובית) ומלמעלה ע"י 1. ולכן הקבוצה A חסומה.

תרגיל: הוכח שהקבוצה $A = \left\{\frac{n^2+1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ אינה חסומה.

פתרון: ברור ש- A חסומה מלמטה ע"י כל מספר שלילי. נוכיח ש- A אינה חסומה מלמעלה, נניח בשלילה כי קיים M כזה שלכל $a \in A$ מתקיים $a \leq M$ כלומר לכל n טבעי מתקיים $\frac{n^2+1}{n} \leq M$ מכאן $n = \frac{n^2}{n} < \frac{n^2+1}{n} \leq M \;\Leftarrow\; \forall n \in \mathbb{N}: n < M$ סתירה לזה שקבוצת הטבעיים אינה חסומה מלמעלה.

הגדרה: החסם המלעיל הקטן ביותר של קבוצה A נקרא סופרמום (חסם עליון) של A ומסמנים: $\sup A$. אם $\sup A$ שייך ל- A אז הוא נקרא גם מקסימום של A ומסמנים: $\max A$.

הגדרה: החסם המלרע הגדול ביותר של קבוצה A נקרא אינפימום (חסם תחתון) של A ומסמנים: $\inf A$. אם $\inf A$ שייך ל- A אז הוא נקרא גם מינימום של A ומסמנים: $\min A$.

דוגמא: $\inf \mathbb{N} = \min \mathbb{N} = 1$

תרגיל: מצא את הסופרימום, אינפימום, מקסימום ומינימום (אם קיימים) של הקבוצות הבאות:

1. $A = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x \leq 2\}$
2. $B = \left\{\frac{n-1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$

פתרון:

1. $\inf A = 1, \sup A = \max A = 2$ אין ל- A מינימום.
2. לכל n טבעי מתקיים $0 \leq \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$ לכן: $infB = minB = 0, supB = 1$ ולא קיים מקסימום.

תרגיל: תהי $A = \left\{\frac{n+1}{2n+4} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ קבוצת מספרים ממשיים. הוכח כי $supA = \frac{1}{2}$.

פתרון: להוכיח כי $supA=\frac{1}{2}$ צריך להוכיח ש- $\frac{1}{2}$ הוא החסם המלעיל הקטן ביותר של A,
בהתחלה נוכיח ש- $\frac{1}{2}$ הוא חסם מלעיל:

ידוע כי $2<4 \Leftarrow 2n+2<2n+4$ מזה נובע כי $\frac{n+1}{2n+4}<\frac{1}{2}$.

נוכיח כעת ש- $\frac{1}{2}$ הוא החסם המלעיל הקטן ביותר, נניח בשלילה כי קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $\frac{1}{2}-\varepsilon$ הוא חסם מלעיל של A. כלומר לכל n טבעי מתקיים $\frac{n+1}{2n+4}<\frac{1}{2}-\varepsilon$. מצד שני $\frac{n+1}{2n+4}=\frac{n+2-1}{2(n+2)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+4}$ לכן לכל n טבעי מתקיים $\varepsilon>\frac{1}{2n+4}$ כלומר $2n+4<\frac{1}{\varepsilon}$ לכן $n<\frac{1}{2\varepsilon}-2$. סתירה לזה ש- $\mathbb{N}$ אינה חסומה מלמעלה. סה"כ: $\frac{1}{2}$ הוא החסם העליון הקטן ביותר של A, כלומר $\sup A=\frac{1}{2}$. ■

תרגיל: מצא את הערך השלם של:

א. $2/3$ ב. $-1/6$ ג. $-4/3$ ד. 6.99

פתרון:

א. $\lfloor 2/3\rfloor=0$ ב. $\lfloor -1/6\rfloor=-1$ ג. $\lfloor -4/3\rfloor=-2$ ד. $\lfloor 6.99\rfloor=6$

תרגיל: מצא את הסופרימום, אינפימום, מקסימום ומינימום (אם קיימים) של הקבוצות הבאות:

א. $A=\left\{\frac{(-1)^n}{n}\middle|n\in\mathbb{N}\right\}$ ב. $C=\{x\in\mathbb{R}|x^2+x-2\le 0\}$

ג. $B=\left\{\frac{3n-4}{n-1}\middle|2\le n\in\mathbb{N}\right\}$ ד. $D=\{x\in\mathbb{R}|x^2+x+1\le 0\}$

פתרון:

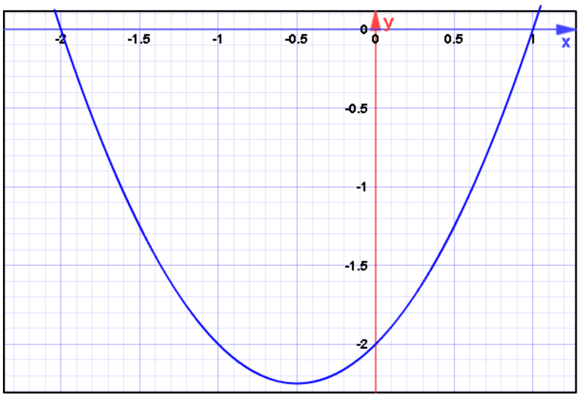
א. $\sup A=0$, $\min A=\inf A=-1$ לא קיים max.

ב. $x^2+x-2=(x+2)(x-1)\le 0$

כלומר, הקבוצה B היא הקטע $[-2,1]$. לכן

$\sup B=\max B=1$

$\inf B=\min B=-2$



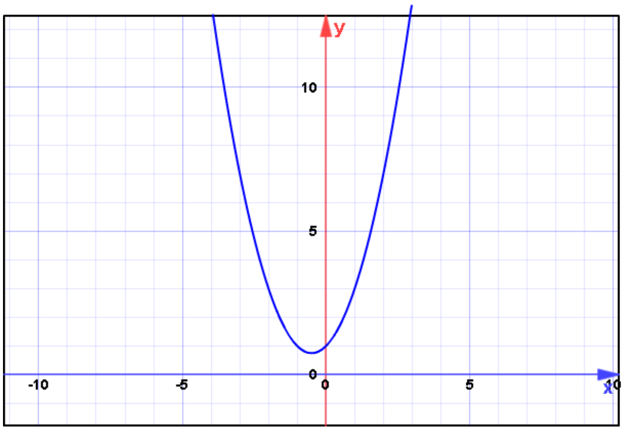
$x^2+x-2\le 0$

ג. $\frac{3n-4}{n-1} = \frac{3n-3-1}{n-1} = \frac{3(n-1)-1}{n-1} = 3 - \frac{1}{n-1}$

$$\forall n \geq 2 \quad : \quad 2 \leq 3 - \frac{1}{n-1} < 3$$

לכן: $\inf C = \min C = 2$, $\sup C = 3$ לא קיים $\max$.

ד. לא קיים x ממשי כך ש- $x^2 + x + 1 \leq 0$, לכן D היא קבוצה ריקה, כלומר לא קיימים $\sup$, $\min$, $\max$ ו- $\inf$.



$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 > 0$$

תרגיל: הוכח שהקבוצה $\left\{ \frac{\lfloor c \cdot n \rfloor}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right.$, $\left. c \text{ ממשי חיובי כלשהו} \right\}$ $A =$ חסומה מלמעלה
ו-$\sup A = c$.

פתרון: לכל n טבעי מתקיים: $c \cdot n - 1 < \lfloor c \cdot n \rfloor \leq c \cdot n$, לכן לכל n טבעי מתקיים: $c - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor c \cdot n \rfloor}{n} \leq c$, כלומר c חוסם את הקבוצה A מלמעלה. נוכיח כעת ש- c הוא חסם עליון הקטן ביותר, נניח בשלילה ש- S הוא חסם עליון קטן מ- c . כלומר, לכל n טבעי: $\frac{\lfloor c \cdot n \rfloor}{n} \leq S < c$ מצד שני, לכל $n > \frac{1}{c-S}$ מתקיים $S < c - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor c \cdot n \rfloor}{n}$. סתירה. לכן c הוא החסם העליון הקטן ביותר, כלומר $\sup A = c$.

פרק I:

טכניקה אלגברית

מערכת משוואות לינאריות

הגדרה: משוואה לינארית היא משוואה שכל הנעלמים בה הם ממעלה ראשונה, צורה כללית למשוואה לינארית ב-n נעלמים: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ ודורשים $a_n \neq 0$.

$x_1, x_2, \dots x_n$ הם הנעלמים ו- $a_1, a_2, \dots, a_n$ הם המקדים ו- b מקדם חופשי.

פתרון למשוואה לינארית זאת, הם n מספרים שהצבתם במקום הנעלמים תיתן פסוק אמת.

הגדרה: מערכת משוואות לינאריות היא אוסף של משוואות לינאריות באותם משתנים. מבנה כללי למערכת כללית של m משוואות עם n נעלמים נכתב באופן הבא:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \cdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

פתרון מערכת משוואות הם n מספרים שהצבתם בכל משוואה במערכת במקום הנעלמים תיתן פסוק אמת.

קיימות כמה שיטות לפתרון מערכת משוואות ליניארית, כאן אנחנו נציג שתיים מתוכן.

שיטת ההצבה

דרך אחת לפתור מערכת משוואות ליניאריות היא לחלץ אחד הנעלמים ולהציבו במשוואות האחרות ולחזור על תהליך זה עד לקבלת משוואה עם נעלם אחד ואז גילוי שאר הנעלמים.

דוגמא: נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 = -7 \end{cases}$$

תחילה, נחלץ את x_1 מהמשוואה הראשונה ונקבל: $x_1 = -2x_2 + 3$ נציב במשוואה השנייה ונקבל:

$$3(-2x_2 + 3) - 2x_2 = -7$$

$$-6x_2 + 9 - 2x_2 = -7$$

$$-8x_2 = -16$$

$$x_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2 \cdot 2 + 3 = -1$$

$$x_1 = -1 \ , \ x_2 = 2$$

תרגיל עצמי: פתור את מערכות המשוואות הבאות בשיטת ההצבה:

$$1.\ \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=-1 \\ 3x_1+6x_2-7x_3=-3 \\ 2x_1-x_2+x_3=-2 \end{cases} \qquad 2.\ \begin{cases} 2x+3y+4z=3 \\ 3x-2y+5z=10 \\ 7x+9y+3z=1 \end{cases}$$

דירוג מטריצות

הגדרה: מטריצה A מסדר m על n (m ו- n טבעיים) היא מערך דו-ממדי שרכיביו הם סקלרים המסודרים ב- m שורות ו- n עמודות.

דוגמא:

$$A_{3\times2}=\begin{pmatrix}1&0\\9&-3\\7&2\end{pmatrix} \quad , \quad B_{2\times3}=\begin{pmatrix}3&-4&4\\1&1&0\end{pmatrix}$$

את האיבר a_{ij} מסמן את הרכיב בשורה i ועמודה j.

לדוגמא, במטריצה $A_{3\times2}$ הנ"ל: $a_{11}=1\ ,\ a_{13}=7$.

למטריצות קיימים הרבה שימושים, אבל בספר זה אנחנו נשתמש בהם כשיטה לפתרון מערכות משוואות. כל מערכת משוואות ליניאריות ניתנת להצגה ע"י מטריצה. כלומר אם מערכת המשוואות הלינאריות מהצורה:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \cdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

אז המטריצה המייצגת מערכת זאת היא:

$$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_n \end{array}\right)$$

A נקראת מטריצת מקדמים, ו- b וקטור[1] חופשי.

הגדרה: בכל שורה במטריצה שאינה שורת אפסים, האיבר הראשון השונה מאפס נקרא האיבר המוביל של השורה.

דוגמא: עבור המטריצה: $A_{2\times3}=\begin{pmatrix}0&-4&4\\3&2&0\end{pmatrix}$ האיבר המוביל בשורה הראשונה שווה ל- -4 . והמוביל בשורה השנייה שווה ל- 3 .

[1] וקטור הוא איבר במרחב וקטורי, הנושא זה נלמד בקורס אלגברה לינארית.

הגדרה: מטריצה תקרא <u>מטריצה מדורגת</u> אם היא מקיימת את התנאים הבאים:

1. כל איבר מוביל הוא מימין לאיבר המוביל בשורה הקודמת.
2. שורות האפסים (אם יש כאלה) מופיעות בתחתית המטריצה.

דוגמא.

$$A_{3\times3}=\begin{pmatrix}3&0&4\\0&1&2\\0&0&4\end{pmatrix},\quad B_{4\times3}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&0&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad,\quad C_{2\times3}=\begin{pmatrix}0&0&4\\0&3&0\end{pmatrix}$$

A,B שתי מטריצות מדורגות, C אינה מטריצה מדורגת כי האיבר המוביל בשורה השנייה מופיע לפני (משמאל) האיבר המוביל של השורה הראשונה.

נזכור כי המטרה שלנו היא לפתור מערכת משוואות ליניאריות. לצורך כך נשתמש בשיטת החילוץ של גאוס[1] (או שיטת גאוס-ז'ורדן[2]). לצורך כך נגדיר מה זה דירוג מטריצה.

הגדרה: דירוג מטריצה היא הפעלת פעולות מתמטיות מסוימות על מטריצה על מנת לקבל מטריצה מדורגת.

הגדרה: פעולות מותרות בתהליך דירוג המטריצה הן פעולות השומרות את קבוצת הפתרונות של מערכת המשוואות בתהליך הדירוג, פעולות אלה נקראות פעולות שורה אלמנטריות:

1. החלפת שתי שורות, לדוגמא החלפת השורה i והשורה j , מסמנים: $R_i \leftrightarrow R_j$
2. הכפלה של שורה בסקלר השונה מאפס, לדוגמא הכפלת השורה i בסקלר $\alpha \neq 0$, מסמנים: $R_i \leftarrow \alpha R_i$.
3. הוספת כפולה של שורה כלשהי לשורה אחרת, לדוגמא להכפיל את הושרה j ב- β ולהוסיף אותה לשורה i, מסמנים: $R_i \leftarrow R_i + \beta R_j$.

הערה: יש לשים לב כי ב (2) הסקלר חייב להיות שונה מאפס ($\alpha \neq 0$), לעומת זאת ב (3) הסקלר יכול להיות שווה לאפס ($\beta = 0$) ובמקרה זה לא יהיה שינוי על השורה המקורית.

דוגמא: תהי $A=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&-1\\3&6&-7&-3\\2&4&-2&-2\end{array}\right)$ מטריצה מייצגת את מערכת המשוואות הלינאריות:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=-1\\3x_1+6x_2-7x_3=-3\\2x_1-x_2+x_3=-2\end{cases}$$

[1] גאוס הוא מתמטיקאי, פיזיקאי ואסטרונום גרמני, מגדולי המתמטיקאים של כל הזמנים. גאוס מכונה נסיך המתמטיקאים.
[2] ז'ורדן הוא מתמטיקאי צרפתי שעסק בתחומים רבים במתמטיקה.

נפעיל את תהליך הדירוג על A :

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&-1\\3&6&-7&-3\\2&-1&1&-2\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-2R_1]{R_2\leftarrow R_2-3R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&-1\\0&0&-16&0\\0&-5&-5&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\leftarrow -\frac{1}{5}R_3]{R_2\leftarrow -\frac{1}{16}R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&-1\\0&0&1&0\\0&1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&-1\\0&1&1&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$$

המטריצה המדורגת מייצגת את המערכת :

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=-1\\ x_2+x_3=0\\ x_3=0\end{cases}$$

מערכת זאת שקולה למערכת מקורית, ולכן הפתרונות למערכת המקורית הם :

$$x_1=-1\ ,\qquad x_2=0\ ,\qquad x_3=0$$

תרגיל: פתור מערכות המשוואות הלינאריות הבאות בשיטת החילוץ של גאוס (דירוג מטריצות) :

1. $\begin{cases}2x+3y=1\\-2x+2z=3\\2x+3y+z=5\end{cases}$

2. $\begin{cases}2y-z=1\\x+2z=3\\x+3y-4z=0\end{cases}$

פתרון. נציג כל מערכת במטריצה ונדרג :

.1

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&0&1\\-2&0&2&3\\2&3&1&5\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-R_1]{R_2\leftarrow R_2+R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&0&1\\0&3&2&4\\0&0&1&4\end{array}\right)\Longrightarrow\begin{cases}2x+3y=1\\3y+2z=4\\z=4\end{cases}$$

לכן הפתרון הוא :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/2\\-4/3\\4\end{pmatrix}$$

.2

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c}0&2&-1&1\\1&0&2&3\\1&3&-4&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&3\\0&2&-1&1\\1&3&-4&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&3\\0&2&-1&1\\0&3&-6&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow 2R_3-3R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&3\\0&2&-1&1\\0&0&-9&-9\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}x+2z=3\\2y-z=1\\-9z=-9\end{cases}$$

לכן הפתרון הוא:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

התנהגות כללית לקבוצת הפתרונות

פתרון של מערכת משוואות לינאריות יכול להיות אחד משלושת המצבים הבאים:

1. למערכת פתרון יחיד.
2. למערכת אינסוף פתרונות.
3. למערכת אין פתרון.

דוגמאות:

בדוגמאות הבאות נתונות מטריצות המתאימות למערכות משוואות כלשהן. כל המטריצות מדורגות יש לקבוע לכל מערכת משוואות ליניאריות האם: יש פתרון/ אין פתרון/ קיימים אינסוף פתרונות:

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c}3&0&4&1\\0&1&2&2\\0&0&4&2\end{array}\right),\quad (B|b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&1\\0&1&3&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&3\end{array}\right),\quad (C|b)=\left(\begin{array}{ccc|c}0&4&0&8\\0&0&4&-4\end{array}\right)$$

למערכת משוואות אותה מייצגת המטריצה $(A|b)$ יש פתרון יחיד.

למערכת משוואות אותה מייצגת המטריצה $(B|b)$ אין פתרון, כי מהשורה האחרונה מתקבלת המשוואה $0=3$, וזה לא מתקיים אף פעם, לכן אומרים שאין פתרון.

למערכת משוואות אותה מייצגת המטריצה $(C|b)$ יש אינסוף פתרונות, וזה כי מספר השורות השונות מאפס במטריצה C קטן ממספר העמודות ואין שורת אפסים ב C המקבילה למספר שונה מאפס ב b (המצב שבו אין פתרון למערכת). מטריצה $(C|b)$ מייצגת את המערכת:

$$\begin{cases}0\cdot x+4y+0\cdot z=8\\0\cdot x+0\cdot y+4z=-4\end{cases}$$

פתרון כללי למערכת זאת כותבים בצורה הבאה:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

מסקנות:

מדוגמאות קודמות ניתן להסיק:

1) אם במערכת משוואות מספר הנעלמים גדול ממספר המשוואות אז למערכת יש שתי אפשריות: אין פתרון / אינסוף פתרונות.
2) אם במהלך הדירוג מקבלים שורת אפסים במטריצת המקדמים המקביל למספר שונה מאפס באיברים החופשיים אז למערכת אין פתרון ואין צורך להמשיך בדירוג המטריצה.
3) שורות האפסים (כולן אפסים) אינן משפיעות על הפתרון.

תרגיל: עבור אילו ערכים ממשיים של α יש למערכת משוואות ליניאריות המיוצגת במטריצה:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & \alpha & 5 \end{array}\right)$$

1. פתרון יחיד 2. אינסוף פתרונות 3. אין פתרון

פתרון: תחילה, נדרג מטריצה מייצגת:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & \alpha & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_1]{R_2 \leftarrow R_2 + R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha - 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 & 2 \end{array}\right)$$

במערכת זו רואים כי מספר הנעלמים גדול ממספר המשוואות, ולכן למרחב הפתרונות של המערכת יש שתי אפשריות: אין פתרון, או אינסוף פתרונות.

אין פתרון: אם מקבלים שורת אפסים במטריצת המקדמים והאיבר החופשי המקביל לה (b) יהי מספר שונה מאפס. וזה יכול להתקבל רק בשורה השלישית כאשר: $\alpha - 1 = 0$ כלומר $\alpha = 1$.

ובכל מקרה אחר למערכת אינסוף פתרונות. כלומר: אם $\alpha \neq 1$ אז יש אינסוף פתרונות.

מערכת משוואות לינאריות הומוגנית

הגדרה: אם כל המקדמים החופשיים במערכת משוואות לינאריות שווים לאפס, אז מערכת זאת נקראת מערכת משוואות לינאריות הומוגנית.

מערכת משוואות לינאריות הומוגנית מציגים אותה רק ע״י במטריצת מקדמים ללא הוקטור b .

דוגמא: מערכת משוואות לינאריות הומוגנית:

$$\begin{cases} 2x+5y+w=0 \\ y+7z-2w=0 \\ x+y+z-w=0 \\ -3x-y+4z=0 \end{cases}$$

מטריצה מייצגת:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

הערה: למערכת משוואות לינאריות הומוגנית תמיד קיים פתרון אפשרי (כאשר כל הנעלמים שווים לאפס) זה נקרא הפתרון הטריוויאלי[1]. ולכן למערכת משוואות הומוגנית קיימות שתי אפשריות: או פתרון יחיד (הטריוויאלי) או אינסוף פתרונות.

תרגיל: פתור את מערכות המשוואות ההומוגניות הבאות:

1. $\begin{cases} 2x+5y+w=0 \\ y+7z-2w=0 \\ x+y+z-w=0 \\ -3x-y+4z=0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 3x-6y=0 \\ 4x-5y+2z=0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -x+2y-z=0 \\ -2x+y-2z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

פתרון. נציג מערכות אלה במטריצות מקדמים ונדרג אותן:

.1

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4+3R_1]{R_3 \leftarrow R_3-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

[1] המונח טריוויאלי מתאר עצם מופשט חסר ייחוד, שקיומו מובן מאליו, ומשום כך אין מוצאים בו עניין.

$$\xrightarrow[R_4\leftarrow R_4-2R_2]{R_3\leftarrow R_3-3R_2}\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&1&7&-2\\0&0&-23&9\\0&0&-7&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4\leftarrow 23R_4-7R_3}\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&1&7&-2\\0&0&-23&9\\0&0&0&-40\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}x=0\\y=0\\z=0\\w=0\end{matrix}$$

למערכת משוואות הנ״ל קיים פתרון יחיד, פתרון טריוויאלי (האפס) .

.2

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\3&-6&0\\4&-5&2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3+4R_1]{R_2\leftarrow R_2-3R_1}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-9&-6\\0&-9&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-R_2}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-9&-6\\0&0&0\end{pmatrix}$$

המטריצה המדורגת מייצגת מערכת משוואות $\begin{cases}x+y+2z=0\\-9y-6z=0\end{cases}$. ולכן הפתרון הוא:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4z/3\\-2z/3\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}-4/3\\-2/3\\1\end{pmatrix}\quad,\qquad z\in\mathbb{R}$$

לכל ערך ממשי של z נקבל פתרון שונה, לכן למערכת זאת קיימים אינסוף פתרונות.

.3

$$\begin{pmatrix}-1&2&-1\\-2&1&-2\\1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3+R_1]{R_2\leftarrow R_2-2R_1}\begin{pmatrix}-1&2&-1\\0&-3&0\\0&3&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+R_2}\begin{pmatrix}-1&2&-1\\0&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

המטריצה המדורגת מייצגת מערכת משוואות $\begin{cases}-x+2y-z=0\\-3y=0\end{cases}$. ולכן הפתרון הוא:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\-x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\quad,\qquad x\in\mathbb{R}$$

לכל ערך ממשי של x נקבל פתרון שונה, לכן למערכת זאת קיימים אינסוף פתרונות.

הערות ומסקנות חשובות:

1) במערכת משוואות ליניאריות הומוגנית קיים פתרון יחיד או אינסוף פתרונות.
2) אם מספר הנעלמים גדול ממספר המשוואות אז בוודאות למערכת קיימים אינסוף פתרונות.
3) אם מספר המשוואות **לאחר הדירוג** שווה למספר העמודות (הנעלמים) אז למערכת קיים פתרון יחיד (פתרון טריוויאלי).

חזקות ושורשים

הגדרה: יהי a מספר ממשי ו-n טבעי כלשהו, אז a בחזקת n מוגדר ע"י : $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ פעמים}}$

a נקרא בסיס החזקה ו-n נקרא מעריך החזקה.

הגדרה: b נקרא שורש n-י של a אם $b^n = a$, ומסמנים : $\sqrt[n]{a} = b$.

דוגמא: 3 הוא שורש ריבועי של 9 . ו-2 הוא שורש שלישי של 8 , או בצורה אחרת: $\sqrt[3]{8} = 2$.

תכונות : יהיו a, b שני מספרים ממשיים ו-n, m טבעיים, אז :

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \; b \neq 0$
5. $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \; a \neq 0$
6. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad , \; a \neq 0$
7. $a^0 = 1 \quad , \; a \neq 0$
8. $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$
9. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
10. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad , \; b \neq 0$
11. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
12. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

תרגיל:

1. הוכח את השוויון**:** $\sqrt{99} - \sqrt{11} = \sqrt{44}$.
2. מצא ביטוי שווה ל- $\frac{\mathbf{2+\sqrt{7}}}{\mathbf{1-\sqrt{2}}}$ ללא שורש במכנה.[1]
3. מצא ביטוי שווה ל- $\frac{\mathbf{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}{\mathbf{5-\sqrt{3}}}$ ללא שורש במונה.
4. מה יותר גדול: $\sqrt{2}$ או $\sqrt[3]{3}$.

פתרון:

1. נציג את המשוואה בצורה הבאה: $\sqrt{11 \cdot 9} - \sqrt{11} = \sqrt{11 \cdot 4}$ נוציא $\sqrt{11}$ גורם משותף ונקבל $\sqrt{11} \cdot \left(\sqrt{9} - 1\right) = \sqrt{11} \cdot \sqrt{4}$ כעת נחלק את שני האגפים ב- $\sqrt{11}$ ונקבל $\sqrt{9} - 1 = \sqrt{4}$ כלומר $3 - 1 = 2$ וזה פסוק אמת, לכן השוויון נכון.

2.
$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{2+2\sqrt{2+}\sqrt{7}+\sqrt{14}}{1-2}$$
$$= -\left(2+2\sqrt{2+}\sqrt{7}+\sqrt{14}\right)$$

[1] הטריק שעושים ב- 2 ו- 3 נקרא כפל בצמוד והוא מסתמך על נוסחאות כפל מקוצר המתוארות בעמוד הבא.

.3
$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{5-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{5-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{3-2}{5\sqrt{3}-5\sqrt{2}-9+\sqrt{6}}$$
$$=\frac{1}{5\sqrt{3}-5\sqrt{2}-9+\sqrt{6}}$$

.4 נעלה את שני הביטויים בחזקת 6 (כי 6 מחלק את 3 ו- 2) ונקבל:
$$\left(\sqrt[3]{3}\right)^6=3^2=9>8=2^3=\left(\sqrt{2}\right)^6$$

משוואות ריבועיות

נוסחאות כפל מקוצר

לכל שני מספרים ממשיים a,b מתקיים:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

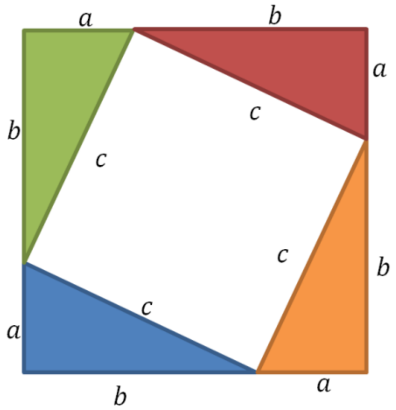
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

באמצעות נוסחאות כפל מקוצר אפשר להוכיח משפט פיתגורס.[1]

משפט (פיתגורס): במשולש ישר זווית, אם אורכי הניצבים שווה ל a ו- b ואורך היתר הוא c אז:

$$a^2+b^2=c^2$$

הוכחה: ניקח ארבעה משולשים ישרי זווית שאורכי צלעותיהם a,b,c ונסדרם כמתואר בשרטוט.



ניתן להוכיח שבצורה זו נוצרים שני ריבועים, ריבוע חיצוני שאורך צלעו $a+b$ וריבוע פנימי שאורך צלעו c. שטח הריבוע החיצוני הוא $(a+b)^2$ והוא שווה לסכום שטחיהם של הריבוע הפנימי וארבעת המשולשים. כלומר:

$$(a+b)^2=c^2+4\cdot\frac{ab}{2}=c^2+2ab$$

מצד שני: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

לכן: $a^2+2ab+b^2=c^2+2ab$ מכאן: $a^2+b^2=c^2$ ■

[1] פיתגורס היה פילוסוף ומתמטיקאי יווני.

השלמה לריבוע

השלמה לריבוע[1] היא טכניקה אלגברית לטיפול בביטוי מהצורה: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$
השלמה לריבוע מתבצעת בשני שלבים:

א. נהפוך את הביטוי $x^2+\frac{b}{a}x$ לביטוי $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

ב. נחסיר את הערך שהוספנו: $\frac{b^2}{4a^2}$ כלומר:

$$x^2+\frac{b}{a}x=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}$$

דוגמא:

1) $x^2-6x+3=(x-3)^2-9+3=(x-3)^2-6$

2) $3x^2+2x-1=3\left(x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right)=3\left(\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\right)=$

$3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-1\frac{1}{3}$

באמצעות שיטה זאת אפשר להוכיח את נוסחת השורשים[2] לפתרון משוואה ריבועית.

משוואה ריבועית

הגדרה: משוואה ריבועית או משוואה ממעלה שנייה היא משוואה מהצורה: $ax^2+bx+c=0$ כאשר a,b,c הם פרמטרים ו- $a\neq 0$.

נוסחת השורשים: הפתרונות למשוואה ריבועית $ax^2+bx+c=0$ הם:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

נוסחה זאת מקבלים ע"י השלמה לריבוע:

$$ax^2+bx+c=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0 \quad \Leftrightarrow$$

[1] הבבלים ידעו להשתמש בשיטת ההשלמה לריבוע.
[2] אל-חוואריזמי (מתמטיקאי פרסי) הוא זה שהמציא את נוסחת השורשים.

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \quad \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

הגדרה: הביטוי מתחת לשורש נקרא דיסקרימיננטה ומסמנים: $\Delta=b^2-4ac$.
באמצעות הדיסקרימיננטה אפשר לדעת את מספר הפתרונות למשוואה ריבועית:

$\Delta>\mathbf{0}$ שני פתרונות $\Delta=\mathbf{0}$ פתרון יחיד $\Delta<\mathbf{0}$ אין פתרון ממשי

תרגיל: מצא את הפתרונות של המשוואות הבאות:

1. $x^2-2x+5=0$
2. $2x^2+3x+1=0$
3. $3x^4-4x^2+1=0$

פתרון:

1. למשוואה זאת אין פתרון ממשי כי: $\Delta=b^2-4ac=4-20=-15<0$.
2. $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{-3\pm1}{4},\ x_1=-\frac{1}{2}\ ,\ x_2=-1$
3. נסמן $x^2=y$ ונשתמש בנוסחת השורשים עבור המשוואה: $3y^2-4y+1=0$
כלומר: $y_{1.2}==\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{6}=\frac{4\pm2}{6},\ y_1=1\ ,\ y_2=\frac{1}{3}$ לכן:

$$x_1=1\ ,\qquad x_2=-1\ ,\qquad x_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\ ,\qquad x_4=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

נוסחאות ויאטה ופירוק לגורמים

מקרה פרטי של נוסחאות ויאטה[1] מציג קשר בין פתרונות של משוואה ריבועית:

אם x_2 , x_1 הם פתרונות של משוואה ריבועית $ax^2+bx+c=0$ אזי:

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}\quad,\quad x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

[1] נוסחאות ויאטה קרויות על שם המתמטיקאי הצרפתי פרנסואה וייט.

נוסחאות ויאטה נותנות טכניקה נוספת לפתרון חלק ממשוואות ריבועיות. ובעזרת נוסחאות אלה ניתן לעשות פירוק לגורמים למשוואה. כלומר ניתן להציג משוואה ריבועית $x^2+bx+c=0$ בפירוק לגורמים ע"י משוואה שקולה[1] : $(x-x_1)(x-x_2)=0$.

דוגמא: נמצא את הפתרונות למשוואה: $x^2-4x+3=0$. נחפש שני מספרים שהסכום שלהם שווה ל 4 והכפל שלהם שווה ל 3 . קל לנחש ששני המספרים המקיימים את זה הם 3, 1 ולכן הפתרונות למשוואה זאת הם 3,1 וכן מתקיים:

$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$$

דוגמאות: פירוק לגורמים

$$x^2+6x+8=(x+2)(x+4)$$

$$x^2+4x+4=(x+2)^2$$

$$x^2-13x-14=(x-14)(x+1)$$

$$x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$$

$$x^2+6x+9=(x+3)^2$$

$$x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$$

אי-שוויונים

תכונות בסיסיות

תכונות הבאות נכונות עבור אי-שוויון $\le$ ואי שוויון ממש $<$. יהיו a,b שני מספרים ממשיים (שונים מאפס) כך ש- $a<b$ אז:

1. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ [2]
2. לכל ממשי c מתקיים: $a+c<b+c$.
3. $c\cdot a<c\cdot b$ לכל c ממשי חיובי.
4. $c\cdot a>c\cdot b$ לכל c ממשי שלילי.
5. אם $a<b$ וגם $b<c$ אזי $a<c$.(תוכנה זו נקראת תכונת הטרנזיטיביות)

תזכורת: אי-שוויון $|a|<b$ שקול ל- $-b<a<b$.

תרגיל: פתור את אי-השוויונים הבאים:

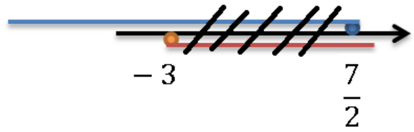
1. $x^2-\frac{x}{2}-\frac{21}{2}\le 0$
2. $\left|\frac{x^2-9}{x+3}\right|<1$
3. $\frac{x(x-1)}{(x-2)(x-3)}<0$

פתרון:

[1] שתי משוואות שקולות אם"ם יש להן אותם פתרונות.

[2] זה נכון אם a ו- b בעלי אותו סימן, אם a ו- b אחד חיובי ואחד שלילי אז לא הופכים את אי-השוויון עם הפיכת המספרים, כלומר $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$.

1. בפירוק לגורמים או נוסחת השורשים נקבל: $x^2-\frac{x}{2}-\frac{21}{2}=\left(x-\frac{7}{2}\right)(x+3)$
ביטוי זה שלילי אם אחד הגורמים שלילי והשני חיובי, כלומר:
$x-\frac{7}{2}\le 0$ וגם $x+3\ge 0$ או $x-\frac{7}{2}\ge 0$ וגם $x+3\le 0$
$x\le\frac{7}{2}$ וגם $x\ge -3$ או $x\ge\frac{7}{2}$ וגם $x\le -3$



$-3\le x\le\frac{7}{2}$ או $\emptyset$
סה"כ הפתרון הוא: $-3\le x\le\frac{7}{2}$

2. לפי נוסחאות כפל מקוצר: $x-3=\frac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}}=\frac{x^2-9}{x+3}$ לכן $\left|\frac{x^2-9}{x+3}\right|=|x-3|<$
1
או בצורה אחרת $-1<x-3<1$ כלומר $2<x<4$.

3. המונה מתאפס בנקודות $x=0,1$ והמכנה מתאפס בנקודות $x=2,3$. נסמן נקודות אלו על ציר המספרים ונבדוק בכל קטע את סימנו של הביטוי באי-השוויון:

לכן הפתרון הוא: $0<x<1$ או $2<x<3$.

אי-שוויון המשולש

אי-שוויון המשולש[1] הוא: $|x+y|\le|x|+|y|\quad \forall x,y\in\mathbb{R}:$

גרסה נוספת של אי-שוויון המשולש: $|x-y|\ge\big||x|-|y|\big|\quad \forall x,y\in\mathbb{R}:$

הוכחת אי-שוויון המשולש: לכל שני מספרים ממשיים x,y מתקיים:

$$\begin{cases}-|x|\le x\le|x|\\-|y|\le y\le|y|\end{cases}$$

נחבר בין שני אי-השוויונים ונקבל:

$$-|x|-|y|\le x+y\le|x|+|y|$$

[1] אי-שוויון המשולש הוא התרגום האלגברי לעובדה שבמשולש, אורכה של כל צלע תמיד יהיה קטן מסכום אורכי הצלעות האחרות.

$$\Rightarrow -(|x|+|y|) \le x+y \le |x|+|y|$$

קל לראות שביטוי זה שקול ל-

$$|x+y| \le |x|+|y|$$

תרגיל עצמי: הוכח את הגרסה השנייה.

אי-שוויון הממוצעים

הגדרה: יהיו $x_1, x_2, \cdots, x_n$ מספרים חיוביים, אז:

- ממוצע חשבוני (ממוצע אריתמטי) שלהם הוא: $A_n = \frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}$
- ממוצע הנדסי (ממוצע גיאומטרי) שלהם הוא: $G_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$
- ממוצע הרמוני שלהם הוא: $H_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$

הערה: אפשר לרשום סכום מספרים בעזרת הסימון Σ (סיגמא) וכפל מספרים בעזרת הסימון Π (פאי) בצורה הבאה:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1+x_2+\cdots+x_n \qquad , \qquad \prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$$

אי-שוויון הממוצעים[1]: לכל n ממשיים חיוביים $x_1, x_2, \cdots, x_n$ מתקיים:

$$H_n \le G_n \le A_n$$

את אי-שוויון הממוצעים הוכיח אוגוסטין קושי[2], וברבות השנים התגלו עשרות הוכחות אחרות.

הערה: השוויון מתקיים רק אם $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

תרגיל: הוכח באמצעות אי-שוויון הממוצעים כי:

1. לכל $x_1, x_2, x_2 > 0$ מתקיים: $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1} \ge 3$
2. לכל n טבעי מתקיים: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$
3. לכל n טבעי מתקיים: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4$

[1]הוכחת אי-שוויון הממוצעים נראה בפרק האינדוקציה.

[2]קושי הוא מתמטיקאי צרפתי, היה מאבות הביסוס הריגורוזי של החשבון האינפיניטסימאלי ותרם רבות לאנליזה המודרנית.

פתרון:

1. לפי אי-שוויון הממוצעים: $\frac{\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\cdot\frac{x_3}{x_1}} = 1$ לכן $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1} \geq 3$.

2. נשתמש באי-שוויון הממוצעים עבור ה- $n+1$ המספרים:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1+\frac{1}{n},\quad x_{n+1} = 1$$

ונקבל:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} = G_{n+1} \leq A_{n+1} = \frac{1+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

$$= 1+\frac{1}{n+1}$$

סה"כ: $\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leq 1+\frac{1}{n+1}$ נעלה את שני האגפים בחזקת n ונקבל:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

אך אי-שוויון הממוצעים הופך לשוויון <u>רק</u> אם המספרים שווים זה לזה, כיוון ש- $1 \neq 1+\frac{1}{n}$ נקבל $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

3. נשתמש באי-שוויון הממוצעים עבור $n+2$ מספרים,

נציב באי-השיוויון: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1+\frac{1}{n}$ ו $x_{n+1} = x_{n+2} = \frac{1}{2}$ ונקבל:

$$\sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = G_{n+2} \leq A_{n+2} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+2}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot\frac{1}{4}} \leq \frac{1+n+1}{n+2} = 1 \quad \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4} \leq 1$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 4$$

אי-שוויון הממוצעים הופך לשוויון <u>רק</u> אם המספרים שווים זה לזה, כיוון ש-

$\frac{1}{2} \neq 1+\frac{1}{n}$ נקבל:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4$$

אי-שוויון ברנולי[1]

אי-שוויון זה קובע שלכל מספר ממשי $x > -1$ ולכל שלם $n \geq 0$ מתקיים: $(1+x)^n \geq 1+nx$.

הערה: אי-שוויון ברנולי הופך לאי-שוויון חזק לכל $x \neq 0$, $n \geq 2$.

תרגיל: הוכח באמצעות אי-שוויון ברנולי כי לכל n טבעי מתקיים $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$

פתרון: לפי אי-שוויון ברנולי מתקיים:

$$\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \geq 1+(n+1)\frac{1}{n^2+2n}$$

מצד שני:

$$1+(n+1)\frac{1}{n^2+2n} > 1+(n+1)\frac{1}{n^2+2n+1} = 1+(n+1)\frac{1}{(n+1)^2} = 1+\frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} = \left(\frac{(n+1)(n+1)}{n(n+2)}\right)^{n+1} > 1+\frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{(n+1)(n+1)}{n(n+2)}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \frac{n+2}{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

■

[1] ברנולי הוא מתמטיקאי שוויצרי.

אי-שוויון קושי

אי-שוויון קושי הוא הגרסה הראשונה של אי-שוויון יותר מוכלל הנקרא אי-שוויון קושי-שוורץ[1]. האי-שוויון קובע

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

לכל $x_i, y_i \in \mathbb{R} \quad , \quad 1 \leq i \leq n$.

הוכחה: נתבונן בסכום הריבועים באי-השוויון $\sum_{i=1}^{n}(x_i + my_i)^2 \geq 0$ אשר מתקיים לכל m ממשי. אחרי פתיחת הסוגריים נקבל אי-שוויון שקול:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + 2m\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\right) + m^2\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \geq 0$$

נסמן: $C = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad , \quad B = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \quad , \quad A = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$ ונקבל אי-שוויון ריבועי: $Am^2 + 2Bm + C \geq 0$ אשר מתקיים לכל m, ובגלל ש- A חיובי נובע כי הדיסקרימיננטה שלו קטנה או שווה אפס: $(2B)^2 - 4AC \leq 0$ כלומר

$B^2 \leq AC$ שזה שקול ל:

$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$. ■

סדרה חשבונית/הנדסית

הגדרה: סדרה היא רשימה סדורה של עצמים, הנקראים איברי הסדרה. נהוג לסמן סדרה ע"י $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר n אינדקס המציין את מקום האיבר בסדרה ו- a_n מציין את ערך האיבר במקום ה- n.

דוגמא: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$ או בצורה אחרת: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה זאת נקראת סדרה הרמונית, המקיימת: $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \ldots$.

אנחנו נתמקד בשתי סדרות, סדרה חשבונית (סדרה אריתמטית) וסדרה הנדסית (סדרה גיאומטרית).

הגדרה: סדרה חשבונית היא סדרת מספרים, שבה ההפרש בין כל שני איברים עוקבים הוא קבוע.

הגדרה: סדרה הנדסית היא סדרת מספרים, שבה היחס בין כל שני איברים עוקבים היא קבועה.

[1]שוורץ הוא מתמטיקאי גרמני.

דוגמאות: סדרה חשבונית: $\{3,7,11,15,\cdots\}$ ההפרש שווה ל- 4 .

סדרה חשבונית: $\{10,8,6,4,\cdots\}$ ההפרש שווה ל- -2 .

סדרה הנדסית: $\{2,6,18,54,\cdots\}$ היחס שווה ל- 3 .

סדרה הנדסית: $\{32,16,8,4,\cdots\}$ היחס שווה ל- $\frac{1}{2}$.

נוסחה כללית

בסדרה חשבונית אם האיבר הראשון הוא a_1 וההפרש הוא d אז האיבר הכללי:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

בסדרה הנדסית אם האיבר הראשון בסדרה הוא a_1 והמנה היא q אז האיבר הכללי:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

תרגיל: מצא את האיבר a_{11} בשתי הסדרות הבאות:

1. $\{7, 2, -3, -8, \cdots\}$
2. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}$

פתרון:

1. סדרה זאת היא סדרה חשבונית עם הפרש שווה ל- -5 . לכן $a_{11} = 7 + (11-1)\cdot(-5)$ כלומר $a_{11} = -43$.
2. סדרה זאת היא סדרה הנדסית עם מנה שווה $\frac{1}{2}$ לכן $a_{11} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{11-1} = \frac{1}{2^{11}} = \frac{1}{2048}$

סכום של סדרה

טענה: סכום n האיברים הראשונים בסדרה חשבונית הוא:

$$S_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}\cdot(2a_1 + (n-1)\cdot d)$$

הוכחה: נשתמש בנוסחת האיבר הכללי בסדרה חשבונית $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$ ונקבל:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-2)d) \\ &\quad + (a_1 + (n-1)d) \end{aligned}$$

מצד שני

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1$$
$$= a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_n - (n-2)d) + (a_n - (n-1)d)$$

אם נחבר שני ביטויים, נקבל $2S_n = n(a_1 + a_n)$. נוסחה זאת עם נוסחת האיבר הכללי מוכיחות את הטענה.

דוגמא: סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה החשבונית $\{7, 2, -3, -8, \cdots\}$ הוא

$$S_{20} = \frac{20}{2}\big(7 + (20-1)(-5)\big) = -880$$

טענה: סכום n האיברים הראשונים בסדרה הנדסית הוא:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

הוכחה:

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}$$
$$= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} + \underbrace{a_1 q^n - a_1 q^n}_{=0}$$
$$= a_1 + q\,\underbrace{(a_1 + a_1 q + \cdots a_1 q^{n-1})}_{=S_n} - a_1 q^n = a_1 + qS_n - a_1 q^n$$

סה״כ

$$S_n = a_1 + qS_n - a_1 q^n \quad \Rightarrow \quad S_n - qS_n = a_1 - a_1 q^n$$
$$\Rightarrow \quad S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

דוגמא: סכום 10 האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית $\{2, 6, 18, 54 \cdots\}$ הוא

$$S_{10} = 2 \cdot \frac{1-3^{10}}{1-3} = 59048$$

הערה: בסדרה הנדסית אם המנה היא מספר בין 1 ו- -1 , כלומר אם $|q| < 1$ אז ניתן לחשב סכום אינסוף איברי הסדרה בעזרת הנוסחה:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

דוגמא: $$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

תרגיל: חשב סכום 12 האיברים הראשונים של הסדרות הבאות:

1. $\{-5,-1,3,\cdots\}$
2. $\{a_n\}=\{2\cdot 3^n\}$

פתרון:

1. זוהי סדרה חשבונית, לכן $S_{12}=\frac{12}{2}\cdot(2\cdot(-5)+(12-1)\cdot 4)=204$
2. $a_n=2\cdot 3^n=6\cdot 3^{n-1}$ לכן $S_{12}=6\cdot\frac{1-3^{12}}{1-3}=1062880$

תרגיל: חשב את הסכום האינסופי: $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^i$

פתרון: $$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^i=1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$$

תרגיל: הוכח כי $0.333333\dot{3}=\frac{1}{3}$

פתרון: $0.333333\dot{3}=0.3+0.03+0.003+0.0003+\cdots$ זהו סכום סדרה הנדסית שהאיבר הראשון בה שווה 0.3 והמנה היא $\frac{1}{10}$. לכן:

$$0.333333\dot{3}=0.3+0.03+0.003+0.0003+\cdots=\frac{0.3}{1-\frac{1}{10}}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}}=\frac{1}{3}$$

תרגיל: הוכח כי $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots ab^{n-2}+b^{n-1})$

פתרון: ברור כי שוויון זה מתקיים אם $a=0$ או $a=b$. ולכן נניח $a\neq 0$, $b\neq 0$ וגם $a\neq b$.

.

הסכום בסוגריים הארוכים הוא סכום n האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עם איבר ראשון a^{n-1} ומנה $\frac{b}{a}$. ולכן סכום זה שווה ל-

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a^{n-1} \cdot \frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1-\left(\frac{b}{a}\right)} = a^{n-1} \cdot \frac{\frac{b^n-a^n}{a^n}}{\frac{b-a}{a}} = \frac{b^n-a^n}{b-a}$$

קיבלנו:

$$(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots ab^{n-2}+b^{n-1}) = \frac{b^n-a^n}{b-a}$$

נכפיל ב- $b-a$ ונקבל:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

תרגיל: נתונה סדרה חשבונית $\{-26,-23,-20,\cdots\}$ מצא את מקום האיבר השלילי האחרון בסדרה.

פתרון: נמצא את ה- n הראשון שעבורו מתקיים $a_n \geq 0$, כלומר $a_n = a_1 + (n-1)d \geq 0$, נציב $a_1=-26$, $d=3$ ונקבל:

$$a_1+(n-1)d = -26+(n-1)3 \geq 0 \implies n \geq \frac{29}{3} = 9\frac{2}{3}$$

לכן מקום האיבר השלילי האחרון בסדרה הוא 9 .

תרגיל: תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה הנדסית כך ש- $q=5$, $S_6=3125$ מצא את a_1.

פתרון: $q=5$ לכן $S_6=3125=a_1 5^5 \iff a_1=1$.

תרגיל:

1. הוכח כי לכל n טבעי המספר $3^{2n}-7^n$ הוא זוגי.
2. הוכח כי לכל n טבעי המספר $7^{2n}-3^{3n}$ אינו ראשוני.

פתרון: נפתור את שני הסעיפים באמצעות הנוסחה:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots ab^{n-2}+b^{n-1})$$

1. $3^{2n}-7^n = 9^n-7^n = (9-7)(\cdots) = \underbrace{2(\cdots)}_{\text{מספר זוגי}}$
2. $7^{2n}-3^{3n} = (49-27)(\cdots) = \underbrace{22(\cdots)}_{\text{איננו ראשוני}}$

תרגיל: מצא נוסחה מפורשת לסכום האינסופי: $S(x)=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{16}-\cdots$

פתרון: $S(x)$ הוא סכום של סדרה הנדסית שהאיבר הראשון בה שווה 1 עם מנה היא $-\frac{x}{2}$.
נמצא נוסחה מפורשת לסכום זה בעזרת נוסחת סכום אינסופי של סדרה הנדסית:

$$S(x)=\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\frac{2}{2+x}$$

נשים לב כי מותר להשתמש בנוסחת סכום אינסופי רק כאשר המנה היא בקטע $(-1,1)$.
כלומר $\left|-\frac{x}{2}\right|<1$ או $|x|<2$ לכן:

$$S(x)=\frac{2}{2+x}\quad,\quad -2<x<2$$

אינדוקציה[1] מתמטית

עקרון האינדוקציה הראשון

אם סדרת טענות אינסופית מקיימת את הדרישות הבאות:

1. הטענה הראשונה נכונה.
2. מכך שהטענה ה-k נכונה (k טבעי כלשהו) נובע שהטענה ה-$k+1$ נכונה.

אז כל הטענות בסדרה נכונות.

דוגמא: נוכיח את השוויון

$$\forall n\in\mathbb{N}:\quad \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

באינדוקציה:

בדיקה: עבור $n=1$ מתקיים $\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{2\cdot 1+1}$ כלומר הטענה הראשונה נכונה.

הנחת האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור k טבעי כלשהו, כלומר:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

[1] משמעות המילה אינדוקציה בשפה הלטינית היא: השראה. בהקשר שלנו השראה לרעיון כלשהו, כלל כלשהו, או נוסחה כלשהי.

נוכיח כעת שהטענה נכונה עבור $k+1$:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}=$$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\underbrace{=}_{\text{לפי הנחת האינדוקציה}}$$

$$\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}=$$

$$\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{(2k+3)}$$

לכן הטענה נכונה לכל n טבעי. ■

תרגיל: הוכח את השוויונים הבאים באינדוקציה :

1. $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2=\dfrac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2}$

3. $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

פתרון:

1. בדיקה : עבור $n=1$ מתקיים $1^2=\frac{1(1+1)(2+1)}{6}=1$, הבדיקה נכונה.
הנחת האינדוקציה : נניח שהטענה נכונה עבור k טבעי כלשהו.
נוכיח כעת שנכונות הטענה עבור k גוררת את נכונות הטענה עבור $k+1$:

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\underbrace{=}_{\text{לפי הנחת האינדוקציה}}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

לכן, לפי עקרון האינדוקציה השוויון נכון לכל n טבעי. ■

2. בדיקה: עבור $n=1$ מתקיים $1^2 = \frac{(-1)^{1-1}1(1+1)}{2} = 1$, הבדיקה נכונה.
הנחת האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור k טבעי כלשהו.
נוכיח שנכונות הטענה עבור k גוררת את נכונות הטענה עבור $k+1$:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{k-1}k^2 + (-1)^k(k+1)^2$$

$$\underbrace{=}_{\text{לפי הנחת האינדוקציה}} \frac{(-1)^{k-1}k(k+1)}{2} + (-1)^k(k+1)^2$$

$$= \frac{(-1)^k(-k(k+1) + 2(k+1)^2)}{2} = \frac{(-1)^k(-k^2 - k + 2k^2 + 4k + 2)}{2}$$

$$= \frac{(-1)^k(k^2 + 3k + 2)}{2} = \frac{(-1)^k(k+1)(k+2)}{2}$$

לכן, לפי עקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל n טבעי. ■

3. בדיקה: עבור $n=1$ מתקיים $1 = 1^2$, הבדיקה נכונה.
הנחת האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור k טבעי כלשהו.
נוכיח כעת שנכונות הטענה עבור k גוררת את נכונות הטענה עבור $k+1$:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + \underbrace{(2k+1)}_{(2(k+1)-1)} \underbrace{=}_{\text{לפי הנחת האינדוקציה}} k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

לכן, לפי עקרון האינדוקציה השוויון נכון לכל n טבעי. ■

תרגיל: הוכח באינדוקציה כי:

1. $3^{2n+1} + 4^{2n+1}$ מתחלק ב- 7 ללא שארית לכל n טבעי.
2. $n^2 - 1$ מתחלק ב- 8 (ללא שארית) לכל n טבעי <u>אי-זוגי</u>.
3. $n^3 + 20 \cdot n$ מתחלק ב- 48 (ללא שארית) לכל n טבעי <u>זוגי</u>.

פתרון:

1. בדיקה: עבור $n=1$ המספר $3^{2\cdot1+1} + 4^{2\cdot1+1} = 3^3 + 4^3 = 27 + 64 = 91$ מתחלק ב-7 ללא שארית.
הנחת האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור k טבעי כלשהו, כלומר:

$$3^{2k+1} + 4^{2k+1}$$

מתחלק ב- 7 ללא שארית.
נוכיח כעת שההנחה גוררת את נכונות הטענה עבור $k+1$, כלומר צריך להוכיח שהמספר:

$$3^{2(k+1)+1} + 4^{2(k+1)+1}$$

מתחלק ב-7 ללא שארית:

$$3^{2(k+1)+1}+4^{2(k+1)+1}=3^2\cdot 3^{2k+1}+4^2\cdot 4^{2k+1}$$
$$=9\cdot\underbrace{(3^{2k+1}+4^{2k+1})}_{\text{מתלק ב–7 לפי הנחת האינדוקציה}}+\underbrace{7\cdot 4^{2k+1}}_{\text{מתחלק ב–7}}$$

סה"כ הביטוי מתחלק ב- 7 , לכן הטענה נכונה לכל n טבעי.

2. בדיקה: עבור $n=1$ נקבל $1-1=0$, אפס מתחלק ב- 8 ללא שארית, לכן טענת הבדיקה נכונה.
הנחת האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור k מספר טבעי אי-זוגי כלשהו.
כלומר k^2-1 מתחלק ב 8 ללא שארית. נוכיח שההנחה גוררת נכונות הטענה עבור המספר האי-זוגי הבא בתור, כלומר עבור $k+2$:

$$(k+2)^2-1=k^2-1+4k+4=\underbrace{k^2-1}_{\text{מתחלק ב 8 לפי הנחת האינדוקציה}}+\underbrace{4(k+1)}_{\text{4 כפול מספר זוגי מתחלק ב 8}}$$

לפי עקרון האינדוקציה, n^2-1 מתחלק ב 8 לכל n טבעי אי-זוגי. ■

3. בדיקה: עבור $n=2$ המספר $2^3+20\cdot 2=48$ מתחלק ב- 48 (ללא שארית).
הנחת האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור k טבעי זוגי כלשהו.
נוכיח כעת שההנחה גוררת את נכונות הטענה עבור $k+2$, כלומר צריך להוכיח שהמספר, $(k+2)^3+20(k+2)$ מתחלק ב- 48 :

$$(k+2)^3+20(k+2)=k^3+6k^2+12k+8+20k+40$$
$$=\underbrace{k^3+20k}_{\text{מתלק ב–48 לפי הנחת האינדוקציה}}+\underbrace{48}_{\text{מתחלק ב–48}}+6k(k+2)$$

נוכיח באינדוקציה נוספת שהביטוי $6k(k+2)$ מתחלק ב- 48 לכל k טבעי זוגי:
בדיקה: עבור $k=2$ המספר $6\cdot 2(2+2)=48$ מתחלק ב- 48 .
הנחת האינדוקציה: הביטוי $6k(k+2)$ מתחלק ב- 48 עבור k טבעי זוגי כלשהו.
נוכיח שמההנחה נובעת נכונות הטענה עבור $k+2$:

$$6(k+2)(k+4)=\underbrace{6k(k+2)}_{\text{מתלק ב–48 לפי הנחת האינדוקציה}}+\underbrace{24(k+2)}_{\text{24 כפול כל מספר זוגי מתחלק ב 48}}$$

סה"כ, הביטוי $n^3+20\cdot n$ מתחלק ב- 48 (ללא שארית) לכל n טבעי זוגי. ■

תרגיל: הוכח באינדוקציה את אי-השוויונים הבאים:

1. $$1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1}$$

2. $$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} < \frac{11}{13} \quad , \quad n \geq 2$$

3. $n! \leq n^n$ (n עצרת[1])

פתרון:

1. הוכח: $1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1}$

בדיקה: עבור $n = 1$ מקבלים $\frac{13}{12} = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{1+1} < 1$, טענת הבדיקה נכונה.

הנחת האינדוקציה: נניח שאי-השוויון מתקיים עבור k טבעי כלשהו, כלומר מתקיים:

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{3k+1} > 1$$

ונוכיח שזה גורר נכונות הטענה עבור $k+1$:

$$\frac{1}{(k+1)+1} + \frac{1}{(k+1)+2} + \cdots + \frac{1}{3(k+1)+1}$$

$$= \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \underbrace{\frac{1}{3(k+1)+1}}_{=\frac{1}{3k+4}}$$

$$= \left(-\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1}\right) + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4}$$

$$= -\frac{1}{k+1} + \underbrace{\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{3k+1}}_{\substack{\text{לפי הנחת האינדוקציה} \\ \text{ביטוי זה} > 1}} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4}$$

$$> 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} \underset{\circledast}{\geq} 1$$

[1] n עצרת (מסמנים $n!$): היא מכפלת כל הטבעיים מ-1 עד n. למשל, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. העצרת מוגדרת למספרים הטבעיים, בנוסף לאפס: $0! = 1$.

לצורך הוכחת ⍟ מספיק להוכיח: $-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}\geq 0$ או באופן שקול:

$$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}\geq\frac{1}{k+1}$$

$$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}\geq\frac{1}{k+1}-\frac{1}{3(k+1)}$$

$$\frac{3k+4+3k+2}{(3k+2)(3k+4)}\geq\frac{2}{3(k+1)}$$

$$6(k+1)\cdot 3(k+1)\geq 2(3k+2)(3k+4)$$

$$18k^2+36k+18\geq 18k^2+36k+16$$

$$18\geq 16$$

אי-שוויון אחרון נכון לכל k טבעי, לכן אי-השוויון:

$$1-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}>1$$

נכון לכל k טבעי. בזה הוכחנו את התנאי השלישי של האינדוקציה. כלומר אי-השוויון

$$1<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}$$

מתקיים לכל n טבעי. ■

2. הוכח: $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}<\frac{11}{13}$, $n\geq 2$

בדיקה: עבור $n=2$ מקבלים

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2+1}=\frac{5}{6}<\frac{11}{13}\quad\Leftrightarrow\quad 13\cdot 5=65<66=6\cdot 11$$

לכן טענת הבדיקה נכונה.

הנחת האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור $k\geq 2$ טבעי כלשהו.

נוכיח שההנחה גוררת נכונות הטענה עבור $k+1$:

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+1+1}+\frac{1}{k+1+2}+\cdots+\frac{1}{2(k+1)-1}$$

$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}$$

$$= -\frac{1}{k} + \underbrace{\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k-1}}_{\substack{\text{לפי הנחת האינדוקציה} \\ \text{ביטוי זה} < \frac{11}{13}}} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1}$$

$$< \frac{11}{13} - \frac{1}{k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} = \frac{11}{13} \underbrace{- \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1}}_{\text{שלילי}} < \frac{11}{13}$$

שלושת התנאים של עקרון האינדוקציה מתקיימים, לכן אי-השוויון:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} < \frac{11}{13}$$

נכון לכל $n \geq 2$ ■

3. $n! \leq n^n$

בדיקה: עבור $n = 1$ מקבלים $1! \leq 1^1$, טענת הבדיקה נכונה.

הנחת האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור kטבעי כלשהו, ונוכיח שהנחה זו גוררת נכונות הטענה עבור $k+1$:

$$(k+1)! = k! \cdot (k+1) \underbrace{\leq}_{\substack{\text{לפי הנחת} \\ \text{האינדוקציה} \\ k! \leq k^k}} k^k(k+1) \underbrace{\leq}_{k^k \leq (k+1)^k} (k+1)^k(k+1)$$

$$= (k+1)^{k+1}$$

סה"כ:

$$(k+1)! \leq (k+1)^{k+1}$$

לכן, לפי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n ■

תרגיל: הוכח את אי-שוויון ברנולי: לכל מספר ממשי $x > -1$ ולכל שלם $n \geq 0$ מתקיים:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

פתרון: נוכיח אי-שוויון ברנולי באינדוקציה:

בדיקה: עבור $n = 0$ אי-השוויון מתקיים (ברור).

הנחת האינדוקציה: נניח שאי-השוויון נכון עבור k שלם אי-שלילי כלשהו.

נוכיח שהנחה זו גוררת נכונות אי-השוויון עבור $k+1$:

$$(1+x)^{k+1}=(1+x)^k(1+x)\underbrace{\geq}_{\substack{\text{לפי הנחת}\\\text{האנדוקציה}\\(1+x)^k\\\geq(1+kx)}}(1+kx)(1+x)=1+x+kx+kx^2$$

$$=1+(k+1)x+\underbrace{kx^2}_{\substack{\text{מספר}\\\text{אישלילי}}}\geq 1+(k+1)x$$

■

תרגיל: נוסחאות נסיגה[1]:

1. הוכח כי אם הסדרה היא: $a_1=\frac{1}{2},\quad a_{n+1}=a_n-\frac{2}{n^3+3n^2+2n}$ אז:
$$a_n=\frac{1}{n^2+n}$$

2. נתונה סדרה המקיימת $a_1=22\ ,\ a_{n+1}=a_n+11\cdot(n^2-n)$ הוכח כי כל איברי הסדרה מתחלקים ב- 22.
3. נתונה סדרה המקיימת $a_1=15\ ,\ a_{n+1}=a_n+3\cdot 2^{3n}-3^{n+1}$ הוכח כי כל אברי הסדרה מתחלקים ב- 15 .

פתרון:

1. בדיקה: עבור $n=1$ מתקיים $a_1=\frac{1}{1^2+1}=\frac{1}{2}$.
הנחת האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור k ונוכיח נכונות הטענה עבור $k+1$:

$$a_{k+1}=a_k-\frac{2}{k^3+3k^2+2k}\underbrace{=}_{\substack{\text{לפי הנחת האינדוקציה}\\a_k=\frac{1}{k^2+k}}}\frac{1}{k^2+k}-\frac{2}{k^3+3k^2+2k}$$

$$=\frac{1}{k^2+k}-\frac{2}{k(k+1)(k+2)}=\frac{k+2-2}{k(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{1}{(k+1)\big((k+1)+1\big)}=\frac{1}{(k+1)^2+k+1}$$

2. בדיקה: ברור כי a_1 מתחלק ב- 22.
הנחת האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור k טבעי כלשהו.
נוכיח שההנחה עבור k גוררת נכונות הטענה עבור $k+1$:
$$a_{k+1}=a_k+11(k^2-k)=a_k+11k(k-1)$$

[1] נוסחת נסיגה היא נוסחה שמגדירה סדרת איברים באופן רקורסיבי לפי האברים הקודמים לו.

a_k מתחלק ב- 22 לפי הנחת האינדוקציה $11k(k-1)$ ביטוי זה מתחלק ב- 22 כי זה כפל של 11 במספר זוגי (אם k אי-זוגי אז $k-1$ זוגי, וההפך). לכן לפי עקרון האינדוקציה כל אברי הסדרה מתחלקים ב- 22 .

3. נתונה סדרה המקיימת $a_1 = 15$, $a_{n+1} = a_n + 3 \cdot 2^{3n} - 3^{n+1}$ הוכח כי כל אברי הסדרה מתחלקים ב- 15.
בדיקה: ברור כי a_1 מתחלק ב- 15.
הנחת האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור k טבעי כלשהו.
נוכיח שהנחת האינדוקציה עבור k גוררת נכונות הטענה עבור $k+1$:

$$a_{k+1} = a_k + 3 \cdot 2^{3k} - 3^{k+1}$$

a_k מתחלק ב- 15 לפי הנחת האינדוקציה. להוכיח שהביטוי $3 \cdot 2^{3k} - 3^{k+1}$ מתחלק גם הוא ב- 15 ניתן להפעיל עקרון האינדוקציה פעם נוספת או להשתמש בזהות[1]:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots ab^{n-2} + b^{n-1})$$

כלומר

$$3 \cdot 2^{3k} - 3^{k+1} = 3(2^{3k} - 3^k) = 3(8^k - 3^k) = 3(8-3)(8^{k-1} + \cdots + 3^{k-1})$$

$$= 15 \cdot (8^{k-1} + \cdots + 3^{k-1})$$

ביטוי זה מתחלק ב- 15 לכל k טבעי. וזה מוכיח את הטענה. ■

עקרון האינדוקציה השני

אם סדרת טענות אינסופית מקיימת את הדרישות הבאות:

1. הטענה הראשונה נכונה.
2. מכך שהטענות מהראשונה עד הטענה ה- k-ית נכונות נובע שהטענה ה-$k+1$ נכונה.

אז כל הטענות בסדרה נכונות.

עקרון האינדוקציה השלישי

אם סדרת טענות אינסופית מקיימת את הדרישות הבאות:

1. הטענה הראשונה נכונה.
2. מכך שהטענה ה- k-ית נכונה נובע שהטענה ה-$2k$ נכונה.
3. מכך שהטענה ה- k-ית ($k \geq 2$) נכונה נובע שהטענה ה-$k-1$ נכונה.

אז כל הטענות בסדרה נכונות.

[1] הוכחת זהות זו נמצאת בפרק סדרה חשבונית/הנדסית.

נוכיח באמצעות עקרון האינדוקציה השלישי את אי-שוויון הממוצעים.

אי-שוויון הממוצעים: לכל n ממשיים חיוביים $x_1, x_2, \cdots, x_n$ מתקיים:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \le \frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}$$

הוכחה: מספיק להוכיח את אי-השוויון הימני: $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \le \frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}$, ולקבל את
אי-השוויון השמאלי $\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$ נציב במקום ה-x-ים את ההופכיים שלהם $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \cdots, \frac{1}{x_n}$ באי-שוויון הימני. את אי-השוויון $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \le \frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}$
נוכיח באמצעות עקרון האינדוקציה השלישי: נתחיל בבדיקה: עבור $n=2$, כלומר לכל x_1, x_2 ממשיים אי-שליליים מתקיים:

$$0 \le \left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2$$

וכאשר פותחים את הסוגריים מקבלים:

$$0 \le \left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2 = x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{x_1x_2} \le x_1+x_2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_1x_2} \le \frac{x_1+x_2}{2}$$

כעת נוכיח שמנכונות הטענה k נובע נכונות הטענה $2k$:

$$\sqrt[2k]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_k \cdot x_{k+1} \cdots x_{2k}} = \sqrt{\sqrt[k]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_k} \cdot \sqrt[k]{x_{k+1} \cdots x_{2k}}} \underbrace{\le}_{\text{לפי הבדיקה, נתיחס לשני השורשים כאילו שני מספרים}}$$

$$\frac{\sqrt[k]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_k}+\sqrt[k]{x_{k+1} \cdots x_{2k}}}{2} \underbrace{\le}_{\text{לפי הנחת האינדוקציה לכל שורש}} \frac{\frac{x_1+\cdots+x_k}{k}+\frac{x_{k+1}+\cdots+x_{2k}}{k}}{2}$$

$$= \frac{x_1+\cdots+x_k+\cdots+x_{2k}}{2k}$$

נוכיח את התנאי השלישי (מכך שהטענה ה-k-ית $(k \ge 2)$ נכונה נובע שהטענה ה-$k-1$ נכונה):

נסמן:

$$X=\frac{x_1+\cdots+x_{k-1}}{k-1}$$

לפי הנחת האינדוקציה

$$\sqrt[k]{x_1\cdot x_2\cdots x_{k-1}\cdot X}\le\frac{x_1+\cdots+x_{k-1}+X}{k}=\frac{(k-1)X+X}{k}=X$$

כלומר

$$x_1\cdot x_2\cdots x_{k-1}\cdot X\le X^k$$

$$\Leftrightarrow\quad x_1\cdot x_2\cdots x_{k-1}\le X^{k-1}$$

$$\Leftrightarrow\quad \sqrt[k-1]{x_1\cdot x_2\cdots x_{k-1}}\le X=\frac{x_1+\cdots+x_{k-1}}{k-1}$$

לפי עקרון האינדוקציה השלישי הטענה נכונה לכל n.

תרגיל:

1. הוכח כי לכל n ממשיים חיוביים $x_1,x_2,\cdots,x_n$ המקיימים $x_1\cdot x_2\cdots x_n=1$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\ge n$$

2. הוכח את אי-שוויון הממוצעים באמצעות סעיף 1.

פתרון:

1. נוכיח טענה זו באמצעות עקרון האינדוקציה השלישי:
בדיקה: עבור $n=1$ אז $x_1=1$ בוודאות, ולכן $\sum_{i=1}^{1}x_i=x_1\ge 1$ (ברור).
הנחת האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור k ממשיים חיוביים כלשהם. כלומר, לכל k ממשיים חיוביים $x_1,x_2,\cdots,x_k$ המקיימים $x_1\cdot x_2\cdots x_k=1$ מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{k}x_i\ge k$$

נוכיח שההנחה גוררת נכונות הטענה עבור $2k$ ו- $k-1$ ממשיים חיוביים:

נתחיל עם $2k$ ממשיים חיוביים, אם $x_1 \cdot x_2 \cdots x_k \cdot x_{k+1} \cdots x_{2k} = 1$ וכן גם לפי ההנחה
$x_1 \cdot x_2 \cdots x_k = 1$ אז $x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdots x_{2k} = 1$, לכן לפי הנחת האינדוקציה מתקיים:

$$\sum_{i=k+1}^{2k} x_i = x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_{2k} \geq k$$

יחד עם סכום k המספרים $x_1, \cdots, x_k$ מקבלים:

$$\sum_{i=1}^{2k} x_i = \sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=k+1}^{2k} x_i \geq k + k = 2k$$

נוכיח כעת שהנחת האינדוקציה גוררת נכונות הטענה עבור $k-1$ ממשיים חיוביים:
יהיו $x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}$ ממשיים חיוביים המקיימים $x_1 \cdot x_2 \cdots x_{k-1} = 1$. צריך להוכיח כי:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} \geq \ k-1$$

נסמן $x_k = 1$, ברור כי $\underbrace{x_1 \cdot x_2 \cdots x_{k-1}}_{=1} \cdot \underbrace{x_k}_{=1} = 1$, לכן לפי הנחת האינדוקציה מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \geq k \ \Longrightarrow \sum_{i=1}^{k-1} x_i + x_k = \sum_{i=1}^{k-1} x_i + 1 \geq k \ \Longrightarrow \ \sum_{i=1}^{k-1} x_i =\geq k-1$$

■

2. יהיו $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ממשיים חיוביים כלשהם, נסמן $X = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$ ונגדיר n חיוביים

$$y_1 = \frac{x_1}{X} \ , y_2 = \frac{x_2}{X} \ , \cdots , y_n = \frac{x_n}{X}$$

ברור כי $y_1 \cdot y_2 \cdots y_n = 1$, לכן לפי סעיף 1 מתקיים $\sum_{i=1}^{n} y_i \geq n$, כלומר

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} \geq n$$

אבל:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} \geq n$$

סה"כ

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$

לקבל את אי-השוויון $\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$ נציב במקום ה-x-ים את ההופכיים שלהם $\frac{1}{x_n}, \cdots, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_1}$ באי-השוויון $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \geq \frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}$.

■

הבינום של ניוטון[1]

הבינום של ניוטון הוא נוסחה לפיתוח חזקות של סכום שני איברים. הנוסחה עבור חזקה שלמה הייתה ידועה זמן רב לפני ניוטון. אנחנו נתמקד רק בחזקות טבעיות.

נוסחת הבינום עבור חזקה טבעית: אם n הוא מספר טבעי אז לכל שני מספרים ממשיים x, y מתקיים:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

כאשר $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ הם מקדמי הבינום.

דוגמא: עבור $n = 2$ מתקיים

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} x^k y^{2-k} = \binom{2}{0} x^0 y^{2-0} + \binom{2}{1} x^1 y^{2-1} + \binom{2}{2} x^2 y^{2-2} \\ &= y^2 + 2xy + x^2\end{aligned}$$

הערה: למקדם הבינום $\binom{n}{k}$ שימושים רבים בקומבינטוריקה והסתברות, כמו כן יש למקדם משמעות קומבינטורית פשוטה: $\binom{n}{k}$ הוא מספר הקבוצות השונות בגודל k שניתן לבחור מ-n איברים כאשר אין חשיבות לסדר הבחירה ואסור לבחור איבר יותר מפעם אחת.

מקדמי הבינום מרכיבים יחד את משולש פסקל[2]:

[1] ניוטון הוא פיזיקאי ומתמטיקאי אנגלי, הנחשב לאחד המדענים הגדולים בכל הזמנים.
[2] פסקל הוא מתמטיקאי, פיזיקאי ופילוסוף צרפתי.

$$\begin{matrix} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0}\binom{1}{1} \\ \binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\ \binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \\ \binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4} \\ \iddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ \iddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \end{matrix}$$

קל לראות ממשולש פסקל ש-

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

הוכחת הבינום של ניוטון

שוב נשתמש באינדוקציה כדי להוכיח את נוסחת הבינום:

בדיקה: אם $x=0$ או $y=0$ אזי הטענה מתקיימת בוודאות. ולכן נניח כי $x \neq 0$ וגם $y \neq 0$.

עבור $n=1$ מתקיים $(x+y)^1 = \binom{1}{0}x^1y^0 + \binom{1}{1}x^0y^1 = x+y$

הנחת האינדוקציה: נניח שהנוסחה נכונה עבור n.

נוכיח נכונות הטענה עבור $n+1$:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n \underbrace{=}_{\text{לפי הנחת האינדוקציה}} (x+y)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$$

$$x\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k} + y\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k+1}$$

$$= \left(\binom{n}{n}x^{n+1} + \sum_{\substack{j=0 \\ j=k}}^{n-1}\binom{n}{j}x^{j+1}y^{n-j}\right) + \left(\binom{n}{0}y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k+1}\right)$$

$$= x^{n+1} + \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n}}_{j=k-1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \right) + y^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k y^{n-k+1} + y^{n+1}$$

$$\underbrace{=}_{\star} \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} y^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$$

נוכיח את השוויון $\star$:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \overset{?}{=} \binom{n+1}{k}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)(n-k)!} + \frac{n!}{k(k-1)!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{k \cdot n! + (n-k+1) \cdot n!}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n+1}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

וזה מוכיח את הטענה. ■

תרגיל: הוכח שסכום המקדמים בבינום שווה ל- 2^n , כלומר $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$

פתרון: נציב בנוסחת הבינום $x = y = 1$ ונקבל את הנדרש.

תרגיל: הוכח את אי-שוויון ברנולי עבור $x \geq 0$ בעזרת הבינום של ניוטון.

פתרון: נציב בבינום $y = 1$ ונקבל

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

$$= \binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{1} x^1 + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n-1}}_{=n} x^{n-1} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} x^n$$

$$= 1 + nx + \underbrace{\ldots + nx^{n-1} + x^n}_{\geq 0} \geq 1 + nx$$

תרגיל: הוכח כי לכל $n > 1$ טבעי מתקיים : $2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

פתרון: כדי להוכיח אי-שוויון זה, נשתמש בבינום של ניוטון :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \binom{n}{0}\frac{1}{n^0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n^1} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + \underbrace{\frac{n!}{(n-1)!\,1!} \cdot \frac{1}{n}}_{=1} + \cdots + \frac{1}{n^n} > 2$$

זה מוכי את אי-השוויון השמאלי.
כעת נוכיח את אי-השוויון הימני :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \binom{n}{0}\frac{1}{n^0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n^1} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + \frac{n!}{(n-1)!\,1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n!}{(n-2)!\,2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n!}{(n-3)!\,3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

נפשט את העצרת ונקבל:

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \underbrace{\frac{n(n-1)}{n^2}}_{<1} + + \frac{1}{3!} \cdot \underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}}_{<1} + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \underbrace{\frac{n!}{n^n}}_{<1}$$

$$< 2 + \frac{1}{2!}\cdot 1 + \frac{1}{3!}\cdot 1 + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot 1 = 2 + \frac{1}{2!} + \underbrace{\frac{1}{3!}}_{<\frac{1}{2^2}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{n!}}_{<\frac{1}{2^{n-1}}}$$

$$\underbrace{\leq}_{\forall n:\, \frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}} 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 2 + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}}_{\substack{=1 \\ \text{סכום סדרה} \\ \text{הנדסית}}} = 2 + 1 = 3$$

בסה״כ קיבלנו:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$$

וזה מוכיח את האגף הימני של אי-השוויון ובזה מסתיימת ההוכחה.

■

פרק II:

פונקציות

מושג הפונקציה ותחום ההגדרה

הגדרה: פונקציה[1] f מהקבוצה A לקבוצה B היא פעולה המתאימה לכל איבר ב- A איבר אחד ויחיד ב-B, מסמנים: $f: D \to E$. הקבוצה A נקראת **תחום ההגדרה** של f , ו B נקראת **הטווח** של f. אם f מתאימה לאיבר x ב-A את האיבר y ב-B אז x נקרא **המקור** של y , ו-y נקרא **התמונה** של x, מסמנים: $f(x) = y$.

לתחום A הגדול ביותר בו הפונקציה $y = f(x)$ מוגדרת, נקרא **תחום הגדרה טבעי** של הפונקציה.

דוגמאות:

1. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ המוגדרת ע״י: $f(n) = 2n$ תחום ההגדרה הוא כל $\mathbb{N}$.
2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע״י: $f(x) = 3x - 2$ תחום ההגדרה הוא כל $\mathbb{R}$.
3. $f: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע״י: $f(x) = 1/x$ תחום ההגדרה הוא $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
4. $D: \mathbb{R} \to \{0,1\}$ המוגדרת ע״י: $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ (פונקצית דיריכלה[2]) תחום ההגדרה הוא כל $\mathbb{R}$.
5. $\text{sign} : \mathbb{R} \to \{-1,0,1\}$ המוגדרת ע״י: $\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ (פונקצית הסימן) תחום ההגדרה הוא כל $\mathbb{R}$.

תרגיל: מצא תחום ההגדרה הטבעי של הפונקציות הבאות:

1. $$f(x) = \frac{3x + 1}{x^2 - 5x + 6}$$
2. $$f(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt{2 - x}$$
3. $$f(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 3x + 2}}$$

פתרון:

1. פונקציה זאת מוגדרת בכל מספר שאינו מאפס את המכנה, כלומר: $\forall x \in \mathbb{R}:\ x^2 - 5x + 6 \neq 0$ או $\forall x \in \mathbb{R}:\ (x - 2)(x - 3) \neq 0$. לכן תחום ההגדרה הוא $A = \{x \in \mathbb{R}:\ x \neq 2,3\}$ או $\mathbb{R}\backslash\{2,3\}$.
2. f מוגדרת לכל x : $x - 1 \geq 0$ וגם $2 - x \geq 0$, כלומר f מוגדרת לכל x ממשי המקיים: $1 \leq x \leq 2$.

[1] לייבניץ (מתמטיקאי, פילוסוף ואיש אשכולות גרמני) הוא שטבע אתה מושג ״פונקציה״ בשנת 1694.
[2] דירכליה הוא מתמטיקאי גרמני שלזכותו נרשמות תוצאות רבות במתמטיקה.

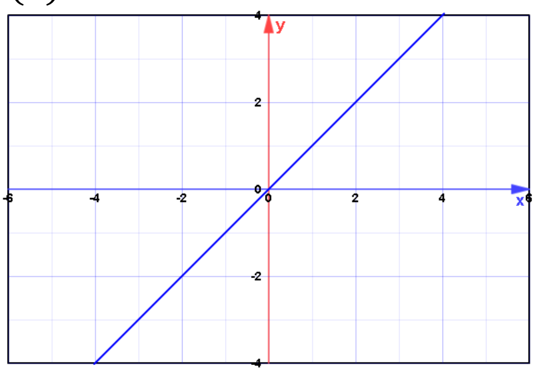
3. f מוגדרת לכל x ממשי המקיים: $x^2+3x+2>0$ או במילים אחרות, f מוגדרת לכל x ממשי המקיים: $x>-1$ או $x<-2$.

הגדרה: גרף של פונקציה f הוא אוסף כל הנקודות $\left(x,f(x)\right)$ במישור xy.

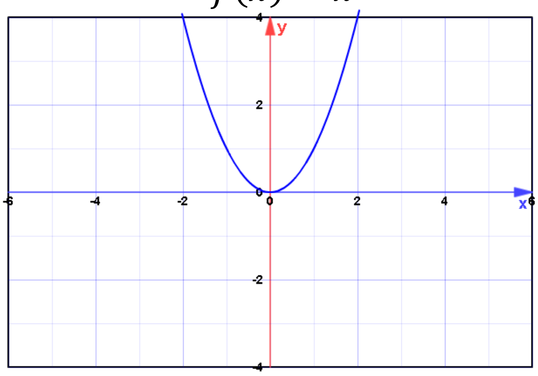
דקארט[1] היה הראשון שהציע להביע פונקציות על ידי שרטוט מערכת צירים גרפית של X ו-Y המתארת את ערכי הפונקציה של X, Y. כך ניתן להבין התנהגות פונקציות באופן גרפי, המקל על הבנת הפונקציה. שיטה זו נקראת מערכת צירים קרטזית[2] על שמו.

דוגמאות:

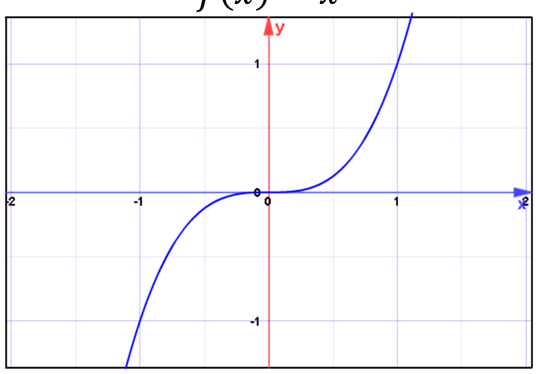
$f(x)=x$



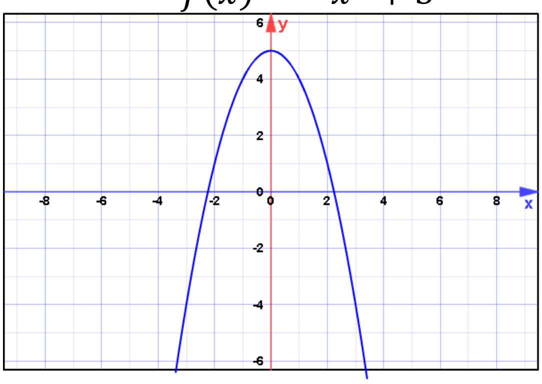
$f(x)=x^2$



$f(x)=x^3$



$f(x)=-x^2+5$

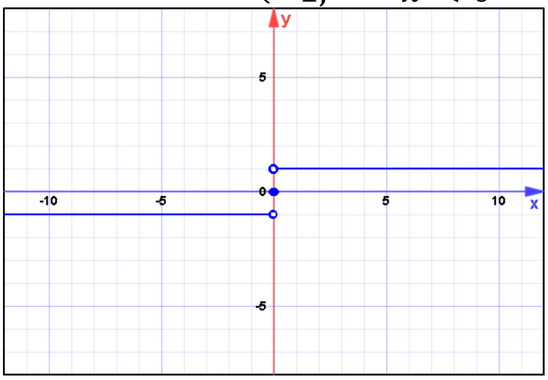


---

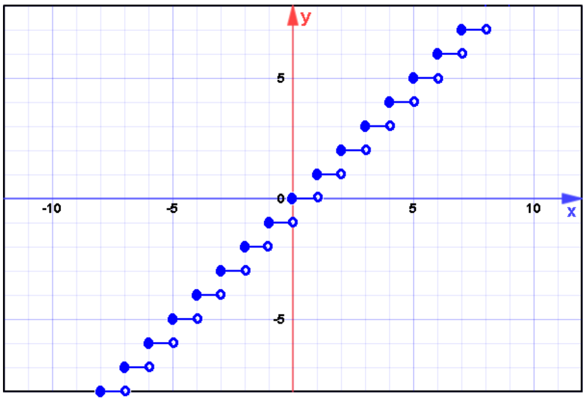
[1] דקארט הוא פילוסוף ומתמטיקאי צרפתי. נחשב לאחד ההוגים החשובים והמשפיעים בהיסטוריה המערבית.

[2] "קרטזית" מלשון "קרטזיוס", הצורה הלטינית של "דקארט"

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



ערך שלם $f(x) = \lfloor x \rfloor$



פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית

הגדרה: f נקראת פונקציה זוגית מעל תחום D אם לכל $x \in D$ מתקיים: $f(-x) = f(x)$.

f נקראת פונקציה אי-זוגית מעל תחום D אם לכל $x \in D$ מתקיים: $f(-x) = -f(x)$.

דוגמאות:

1. הפונקציות: $f(x) = x^2$, $f(x) = |x|$ הן פונקציות זוגיות מעל $\mathbb{R}$.
2. הפונקציות: $f(x) = x^3$, $f(x) = x$ הן פונקציות אי-זוגיות מעל $\mathbb{R}$.

תרגיל: קבע את זוגיות הפונקציות הבאות בתחום הגדרתן:

1. $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$
2. $f(x) = 2x^7 - x^3 + 4x$
3. $f(x) = 3^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x$
4. $f(x) = \frac{x}{2^x}$

פתרון:

1. f מוגדרת בקטע סימטרי $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, כמו כן לכל x בקטע מתקיים:

$$f(-x) = \sqrt{2 - (-x)^2} = \sqrt{2 - x^2} = f(x)$$

לכן f זוגית מעל $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

2. f מוגדרת על כל הציר הממשי, ולכל x מתקיים:

$$f(-x) = 2(-x)^7 - (-x)^3 + 4(-x) = -2x^7 + x^3 - 4x =$$
$$-(2x^7 - x^3 + 4x) = -f(x)$$

לכן f אי-זוגית מעל $\mathbb{R}$.

3. f מוגדרת על כל הציר הממשי, ולכל x מתקיים:

$$f(-x) = 3^{-x} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 3^x = 3^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x = f(x)$$

לכן f זוגית מעל $\mathbb{R}$.

4. f מוגדרת על כל הציר הממשי, ולכל x מתקיים:
$f(x)$, $f(-x) = -\frac{x}{2^{-x}} = -x \cdot 2^x \neq -f(x)$, לכן f לא זוגית ולא אי-זוגית.

הערה: $f(x) = 0$ היא פונקציה זוגית וגם אי-זוגית.

טענה: ניתן להציג כל פונקציה $f(x)$ כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית: $f(x) = g(x) + h(x)$, כאשר:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \qquad h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

ע"י בדיקה פשוטה ניתן לראות כי $g(-x) = -g(x)$ (פונקציה אי זוגית) וגם $h(-x) = h(x)$ (פונקציה זוגית)

דוגמא:
$$f(x) = \frac{x}{2^x} = g(x) + h(x) = \underbrace{\frac{\frac{x}{2^x} - \frac{x}{2^{-x}}}{2}}_{g(x)} + \underbrace{\frac{\frac{x}{2^x} + \frac{x}{2^{-x}}}{2}}_{h(x)}$$

תרגיל: הצג את הפונקציות הבאות כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית:

1. $f(x) = x^2 + 2x - 3$

2. $f(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+3}}$

3. $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2, & x < 0 \\ x - 5, & x \geq 0 \end{cases}$

פתרון:

1.

$$f(x) = \underbrace{\frac{x^2 + 2x - 3 - (x^2 - 2x - 3)}{2}}_{g(x)} + \underbrace{\frac{x^2 + 2x - 3 + (x^2 - 2x - 3)}{2}}_{h(x)}$$

$$= \underbrace{2x}_{g(x)} + \underbrace{x^2 - 3}_{h(x)}$$

2. מבדיקה ראשונית מתברר כי f היא פונקציה אי-זוגית, לכן:

$$f(x)=\frac{2x^3}{\sqrt{x^2+3}}=\underbrace{\frac{2x^3}{\sqrt{x^2+3}}}_{g(x)}+\underbrace{0}_{h(x)}$$

.3

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+2, & x<0\\ x-5, & x\geq 0\end{cases}$$

נגדיר את הפונקציות $g(x),h(x)$:

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(-x)}{2}, & x<0\\ \frac{f(x)-f(-x)}{2}, & x\geq 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{-x^2+2-(-x-5)}{2}, & x<0\\ \frac{x-5-(-x^2+2)}{2}, & x\geq 0\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}\frac{f(x)+f(-x)}{2}, & x<0\\ \frac{f(x)+f(-x)}{2}, & x\geq 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{-x^2+2+(-x-5)}{2}, & x<0\\ \frac{x-5+(-x^2+2)}{2}, & x\geq 0\end{cases}$$

ולכן :

$$f(x)=\begin{cases}\overbrace{\frac{-x^2+2-(-x-5)}{2}}^{g(x)}+\overbrace{\frac{-x^2+2+(-x-5)}{2}}^{h(x)}, & x<0\\ \frac{x-5-(-x^2+2)}{2}+\frac{x-5+(-x^2+2)}{2}, & x\geq 0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\overbrace{\frac{-x^2+x+7}{2}}^{g(x)}+\overbrace{\frac{-x^2-x-3}{2}}^{h(x)}, & x<0\\ \frac{x^2+x-7}{2}+\frac{-x^2+x-3}{2}, & x\geq 0\end{cases}$$

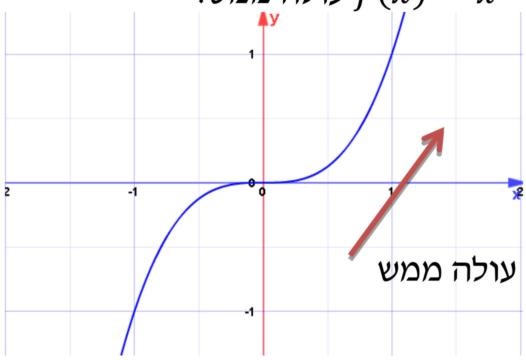
פונקציה מונוטונית

הגדרה: תהי f פונקציה מוגדרת בתחום D, אם $\forall x_1, x_2 \in D:\ x_1 < x_2$ מתקיים:

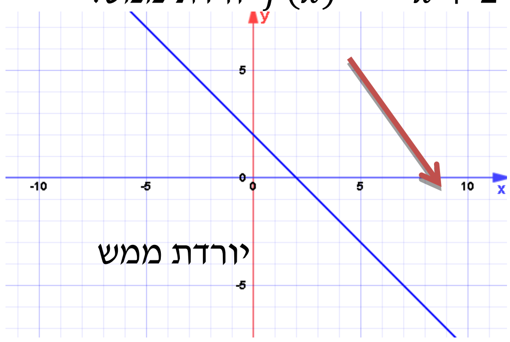
- $f(x_1) \le f(x_2)$ אז f נקראת מונוטונית עולה.
- $f(x_1) < f(x_2)$ אז f נקראת מונוטונית עולה ממש.
- $f(x_1) \ge f(x_2)$ אז f נקראת מונוטונית יורדת.
- $f(x_1) > f(x_2)$ אז f נקראת מונוטונית יורדת ממש.

דוגמאות:

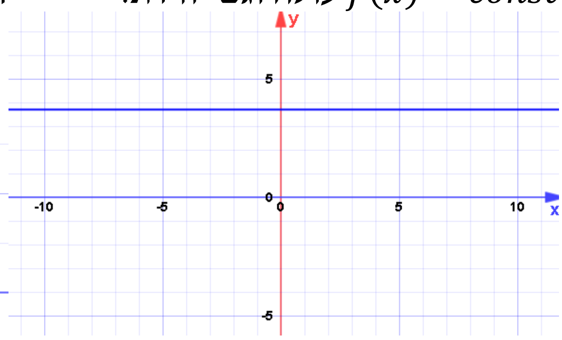
1. $f(x) = x^3$ עולה ממש.



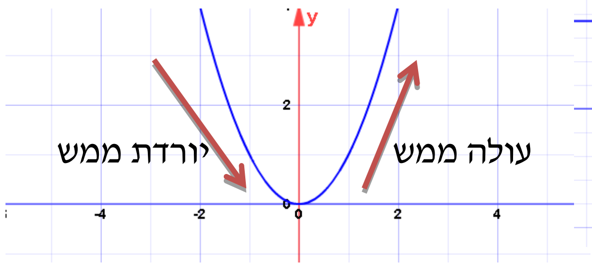
2. $f(x) = -x + 2$ יורדת ממש.



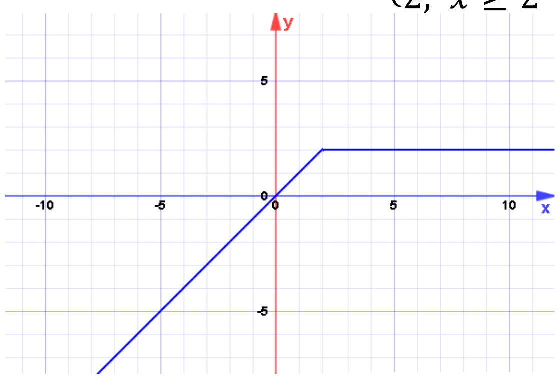
3. $f(x) = const$ עולה וגם יורדת.



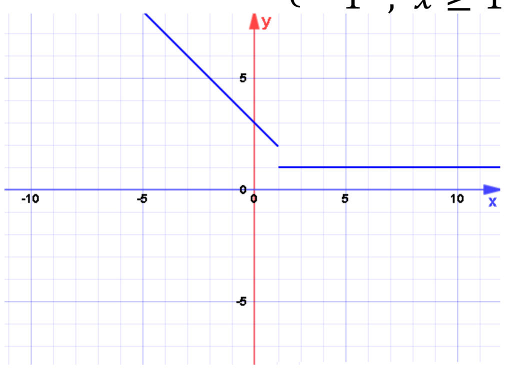
4. $f(x) = x^2$ עולה ממש בקטע $[0, \infty)$ ויורדת ממש בקטע $(-\infty, 0]$



5. $f(x) = \begin{cases} x, & x < 2 \\ 2, & x \ge 2 \end{cases}$ עולה



6. $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 1 \\ 1\ , & x \ge 1 \end{cases}$ יורדת



הגדרה: $f(x)$ נקראת מונוטונית אם היא מקיימת את אחד מהתנאים הנ"ל.

תרגיל: הוכח כי $f(x)$ מונוטונית בתחום הגדרתה:

1. $f(x) = -\sqrt[3]{x^3-1}$
2. $f(x) = \begin{cases} -x^2+1 \ , & x<0 \\ 1 \ , & x \geq 0 \end{cases}$
3. $f(x) = \lfloor x \rfloor$

פתרון:

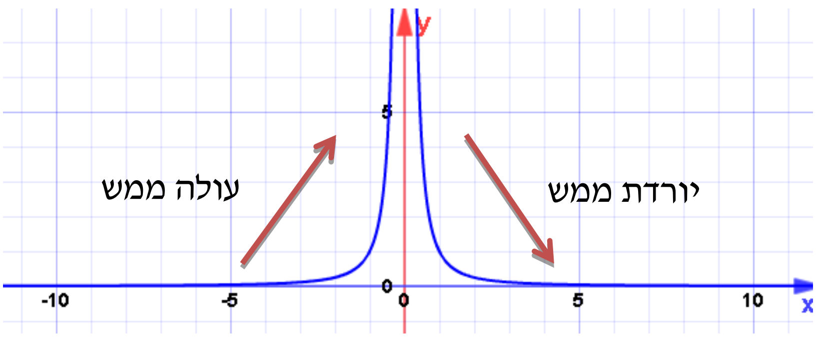
1. לכל $x_1 < x_2$ מתקיים: $x_1{}^3 < x_2{}^3 \Leftarrow x_1{}^3 - 1 < x_2{}^3 - 1 \Leftarrow$ $\sqrt[3]{x_1{}^3-1} < \sqrt[3]{x_2{}^3-1} \Leftarrow f(x_1) = -\sqrt[3]{x_1^3-1} > -\sqrt[3]{x_2^3-1} = f(x_2)$
לכן, f מונוטונית יורדת ממש.
2. עבור $x \geq 0$ הפונקציה קבועה, או מונוטונית עולה. נתבונן בחלק השלילי, לכל $x_1 < x_2 < 0$ מתקיים: $x_1{}^2 > x_2{}^2 \Leftarrow -x_1{}^2 < -x_2{}^2 \Leftarrow 1 - x_1{}^2 < 1 - x_2{}^2 < 1$
לכן לכל $x_1 < x_2$ מתקיים $f(x_1) \leq f(x_2)$ כלומר f מונוטונית עולה.
3. לכל $x_1 < x_2$ מתקיים $f(x_1) = \lfloor x_1 \rfloor \leq \lfloor x_2 \rfloor = f(x_2)$, לכן f מונוטונית עולה.

תרגיל: מצא תחום העלייה ותחום הירידה של הפונקציות:

1. $f(x) = \frac{1}{x^2}$
2. $f(x) = \frac{1}{x}$
3. $f(x) = |x|$

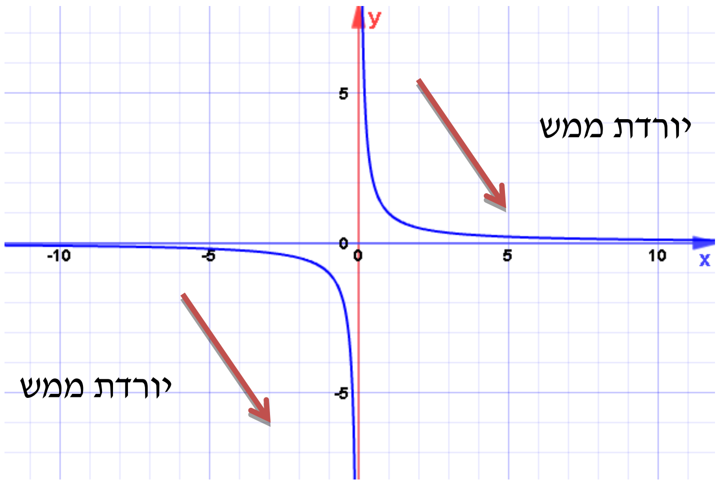
פתרון:

1. f מוגדרת בתחום $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ולכל $0 < x_1 < x_2$ מתקיים: $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftarrow \frac{1}{x_1{}^2} > \frac{1}{x_2{}^2}$
כלומר f יורדת ממש בקטע $(0,\infty)$. לכל $x_1 < x_2 < 0 \Leftarrow x_1{}^2 > x_2{}^2 \Leftarrow$ $\frac{1}{x_1{}^2} < \frac{1}{x_2{}^2} \Leftarrow$
$f(x_1) < f(x_2)$, כלומר f עולה ממש בקטע $(-\infty,0)$:

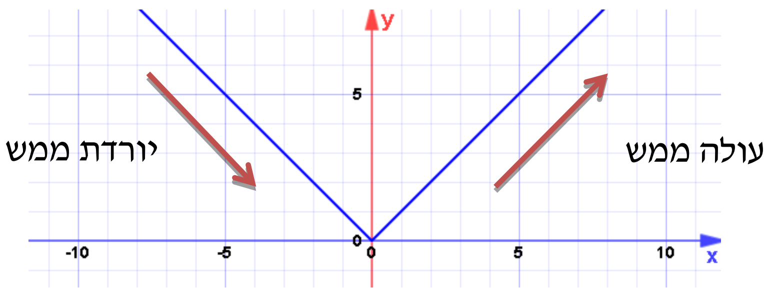


2. f מוגדרת בתחום $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ולכל $0 < x_1 < x_2$ מתקיים: $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ $\Leftarrow f$ יורדת ממש בקטע $(0,\infty)$. כמו כן, לכל $x_1 < x_2 < 0$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ $\Leftarrow$ f יורדת ממש בקטע $(0,\infty)$.

לשים לב ש- f אינה מונוטונית על כל הציר הממשי:



3. f מוגדרת לכל $\mathbb{R}$ ולכל $0 \le x_1 < x_2$ מתקיים: $f(x_1) = |x_1| < |x_2| = f(x_2)$ כלומר f עולה ממש בקטע $[0,\infty)$. ולכל $x_1 < x_2 \le 0$ מתקיים: $f(x_1) = |x_1| > |x_2| = f(x_2)$ כלומר f יורדת ממש בקטע $[0,\infty)$. אבל f אינה מונוטונית על כל הציר הממשי:

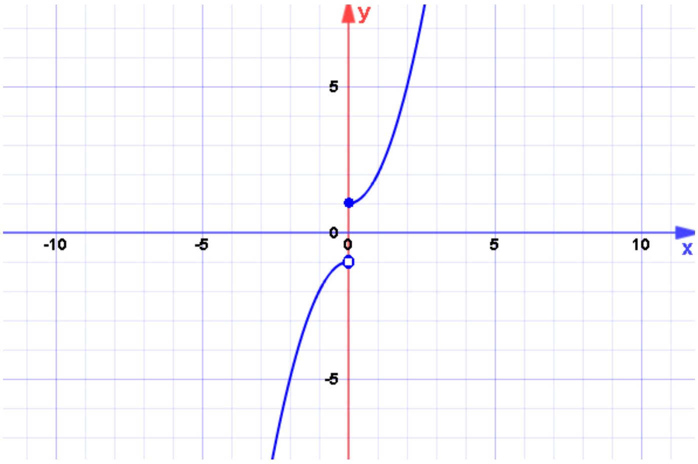


תרגיל: הוכח או הפרך:

1. אם f מונוטונית עולה בתחום D, ו- $f(x) \neq 0$ לכל $x \in D$, אז $\frac{1}{f(x)}$ מונוטונית יורדת בתחום D.
2. אם f, g מונוטוניות עולות בתחום D אז $f - g$ מונוטונית עולה ב- D.
3. אם f מונוטונית עולה ו- g מונוטונית יורדת בתחום D אז $f - g$ מונוטונית עולה ב- D.

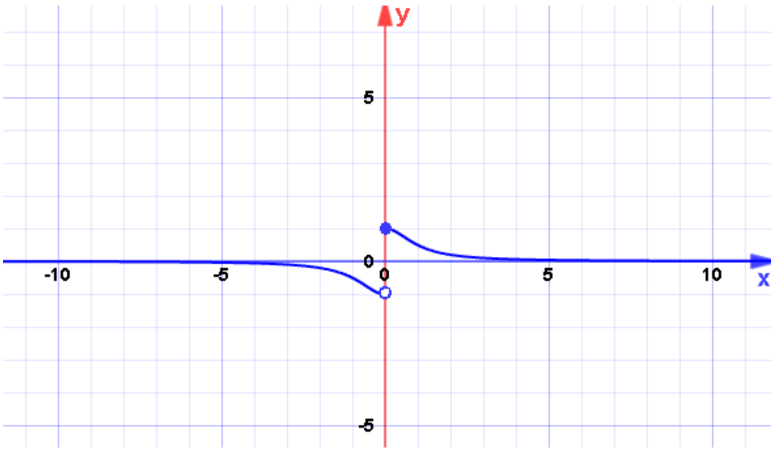
פתרון:

1. טענה אינה נכונה, דוגמא נגדית: $f(x)=\begin{cases}-x^2-1, & x<0\\ x^2+1\ , & x\geq 0\end{cases}$ היא פונקציה עולה ממש על
כל ציר הממשיים:



מצד שני $\frac{1}{f(x)}=\begin{cases}\frac{1}{-x^2-1}, & x<0\\ \frac{1}{x^2+1}\ , & x\geq 0\end{cases}$ אינה פונקציה יורדת, נבחר:

$$f(-1)=-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}=f(1)\Leftarrow x_1=-1<1=x_2$$



2. טענה אינה נכונה, דוגמא נגדית: $f(x)=x\ ,g(x)=x^2$ שתי פונקציות עולות ממש בקטע $[1,\infty)$. אבל $(f-g)(x)=x-x^2$ פונקציה יורדת בקטע $[1,\infty)$.
טענה נכונה: נתון כי f מונוטונית עולה ו- g מונוטונית יורדת בתחום D ולכן
$$f(x_1)\leq f(x_2)\ \ ,\ \ g(x_1)\geq g(x_2)\Leftarrow\forall x_1<x_2\in D$$

זה שקולל ל-:

$$\begin{cases} f(x_1) \le f(x_2) \\ -g(x_1) \le -g(x_2) \end{cases}$$

נחבר את שני אי-השוויונים ונקבל:

$$f(x_1) - g(x_1) \le f(x_2) - g(x_2)$$

כלומר $f - g$ מונוטונית עולה.

פונקציה הפוכה

הגדרה: $f: D \to E$ נקראת חד-חד-ערכית (חח״ע או 1:1) אם לכל איבר y בתמונה של f קיים x אחד כך ש- $f(x) = y$. באופן שקול: f חח״ע $\Longleftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in D \ : f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow x_1 = x_2$

או בצורה אחרת: f חח״ע $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in D \ : x_1 \neq x_2 \ \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

במלים פשוטות: פונקציה חח״ע אם אין שני x -ים הולכים לאותו y.

דוגמאות.

1. $f(x) = x^3$ היא חח״ע על כל $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = x^2$ היא אינה חח״ע על כל $\mathbb{R}$, כי $x_1 = -1 \neq 1 = x_2$ אבל $f(x_1) = f(x_2) = 1$.
3. $f(x) = x^2$ היא חח״ע בקטע $[0, \infty)$.
4. $f(x) = x^2$ היא חח״ע בקטע $(-\infty, 0]$.

תרגיל: בדוק אם f היא חח״ע ב- D:

1. $f(x) = |x|, \ \ D = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \frac{1}{x} + x \ , \ D = (0, \infty)$
3. $f(x) = \frac{1}{x} + x \ , \ D = (1, \infty)$
4. $f(x) = 2^x - 1 \ , \ D = \mathbb{R}$

פתרון:

1. f אינה חח״ע על כל $\mathbb{R}$, כי עבור $x_1 = -1 \neq 1 = x_2$ מתקיים:
$$f(x_1) = f(x_2) = 1$$
2. f אינה חח״ע ב- D , ניקח למשל:
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 2 = f(2) \ \Longleftarrow \ x_1 = \frac{1}{2} \ , x_2 = 2$$
3. f כן חח״ע ב- D: נניח ש- $f(x_1) = f(x_2)$ ונוכיח שבהכרח $x_1 = x_2$:
אם: $f(x_1) = f(x_2)$ אזי:

$$\Leftarrow \quad x_2 + {x_1}^2 \cdot x_2 = x_1 + x_1 \cdot {x_2}^2 \quad \Leftarrow \quad \frac{1}{x_1} + x_1 = \frac{1}{x_2} + x_2$$

$$\Leftarrow \quad x_2 - x_1 = x_1 \cdot x_2(x_2 - x_1) \quad \Leftarrow \quad x_2 - x_1 = x_1 \cdot {x_2}^2 - {x_1}^2 \cdot x_2$$

$(x_2 - x_1) = 0$ או $(1 - x_1 \cdot x_2) = 0 \quad \Leftarrow \quad (x_2 - x_1)(1 - x_1 \cdot x_2) = 0$

היות ו- $1 < x_1, x_2$ נקבל ש- $x_1 \cdot x_2 \neq 1$ לכן בהכרח $x_1 - x_2 = 0$ כלומר $x_1 = x_2$.

4. f חח"ע ב- D $\forall x_1 \neq x_2 \quad \Leftarrow \quad 2^{x_1} \neq 2^{x_2} \quad \Leftarrow \quad 2^{x_1} - 1 \neq 2^{x_2} - 1 \quad \Leftarrow$ $f(x_1) \neq f(x_2)$.

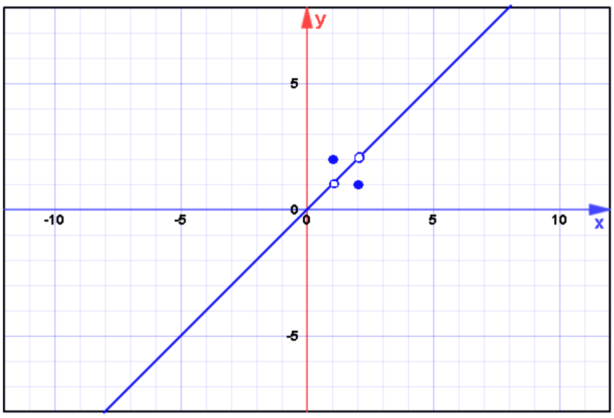
תרגיל:

1. הוכח שכל פונקציה עולה ממש (או יורדת ממש) בתחום D היא פונקציה חח"ע ב- D.
2. הראה שהטענה ההפוכה אינה בהכרח נכונה, כלומר לא כל פונקציה חח"ע היא בהכרח עולה ממש או יורדת ממש.

פתרון:

1. תהי $f(x)$ פונקציה עולה ממש בתחום D. אזי לכל $x_1 \neq x_2$ ב- D מתקיים: אם $x_1 < x_2$ אז $f(x_1) < f(x_2)$, ואם $x_1 > x_2$ אז $f(x_1) > f(x_2)$. בשני המקרים $f(x_1) \neq f(x_2)$. לכן f חח"ע.

2. $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1,2 \\ 1, & x = 2 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ היא פונקציה חח"ע על כל ציר הממשיים אך איננה מונוטונית:



הגדרה: $f: D \to E$ נקראת פונקציה על (על E) אם לכל איבר y ב-E קיים x ב-D כך ש- $f(x) = y$.

דוגמאות:

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = x + 1$ היא פונקציה על $\mathbb{R}$. כי לכל $y \in \mathbb{R}$ קיים $x \in \mathbb{R}$ מתאים כך ש $f(x) = y$. (אם נבחר $x = y - 1$)

2. $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ המוגדרת ע״י $f(x)=x^2$ היא פונקציה על $[0,\infty)$. כי לכל $y\in[0,\infty)$ קיים $x\in\mathbb{R}$ מתאים כך ש $f(x)=y$. (אם נבחר $x=\sqrt{y}$)
3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע״י $f(x)=x^2$ אינה על, כיוון שעבור $y=-1\in\mathbb{R}$ אין לו מקור $x\in\mathbb{R}$ המקיים: $f(x)=y=-1$.

תרגיל: קבע תחום וטווח בהם הפונקציה $f(x)=x^2$ תהיה חח״ע וגם על.

פתרון: התחום יכול להיות $[0,\infty)$ או $(-\infty,0]$ והטווח $[0,\infty)$. נכון גם התחום $[a,b]$, והטווח $[a^2,b^2]$ לכל $0\le a<b$ ממשיים.

הגדרה: אם $f:D\to E$ חח״ע ועל ז״א שאפשר להתאים לכל $y\in E$ ערך אחד ויחיד $x\in D$ כך ש- $y=f(x)$, התאמה זאת נקראת הפונקציה ההפוכה של- $f(x)$ ומסמנים: $f^{-1}:E\to D$.

הפונקציה f^{-1} נקראת הפונקציה ההפוכה של f אס״ם היא מקיימת את התנאים הבאים:

1. $\forall x\in D \quad f^{-1}\big(f(x)\big)=x$
2. $\forall y\in E \quad f\big(f^{-1}(y)\big)=y$

אם קיימת פונקציה הפוכה ל f, נאמר שהפונקציה f הפיכה.

משפט: פונקציה f אס״ם היא חח״ע ועל.

דוגמא: עבור $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע״י $f(x)=x^3$, זוהי פונקציה חח״ע ועל, ולכן קיימת לה פונקציה הפוכה.

הפונקציה ההפוכה $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע״י $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$.

תרגיל: מצא f^{-1} של:

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע״י $f(x)=2x+4$.
2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע״י $f(x)=x^3+7$.
3. $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ המוגדרת ע״י $f(x)=\frac{1}{x^2}$.

פתרון:

1. f היא פונקציה חח״ע ועל, לכן קיימת פונקציה f^{-1} כך שלכל $y\in\mathbb{R}$ מתקיים $f\big(f^{-1}(y)\big)=y \Leftarrow 2f^{-1}(x)+4=y \Leftarrow f^{-1}(y)=\frac{y}{2}-2$
ובמשתנה x: $f^{-1}(x)=\frac{x}{2}-2$ היא הפונקציה ההופכית של $f(x)=2x+4$.
2. f היא פונקציה חח״ע ועל, לכן קיימת פונקציה f^{-1} שלכל $y\in\mathbb{R}$ מתקיים $f\big(f^{-1}(y)\big)=y$ כלומר:

$\Leftarrow \left(f^{-1}(y)\right)^3 = y - 7 \Leftarrow f\left(f^{-1}(y)\right) = \left(f^{-1}(y)\right)^3 + 7 = y$

$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-7}$.

ובמשתנה x : $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-7}$ היא הפונקציה ההופכית של $f(x) = x^3 + 7$.

3. f היא פונקציה חח״ע ועל, לכן קיימת פונקציה f^{-1} כך שלכל $y \in (0,\infty)$ מתקיים : $f\left(f^{-1}(y)\right) = \frac{1}{\left(f^{-1}(y)\right)^2} = y \Leftarrow f^{-1}(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$.

ובמשתנה x : $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ היא הפונקציה ההופכית של $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

הערה : לשים לב ש- $f(x) = \frac{1}{x^2}$ אינה חח״ע ועל $\mathbb{R}$ לכן במקרה זה לא קיימת ל-f פונקציה הפוכה.

תרגיל: תן דוגמא לפונקציה :

1. $f: (0,1) \to (0,\infty)$ חח״ע ועל ומצא את f^{-1}.
2. $a < b$, $f: (a,b) \to (0,1)$ חח״ע ועל ומצא את f^{-1}..
3. $a < b$, $c < d$ $f: (a,b) \to (c,d)$ חח״ע ועל.
4. תן דוגמא לפונקציה $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ על.

פתרון:

1. $$f^{-1}(x) = \frac{1}{1+x} \quad , \quad f(x) = \frac{1-x}{x}$$

2. $$f^{-1}(x) = (b-a)x + a \quad , \quad f(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

3. $$f(x) = (d-c)\cdot\frac{x-a}{b-a} + c$$

4. $$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

פולינומים

הגדרה: פולינום[1] הוא פונקציה מהצורה $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ כאשר
$a_n\,,a_{n-1}\,,\cdots,a_0$ מקדמים ו- x משתנה.

נאמר שהפולינום p הוא מדרגה (מעלה) n אם המקדם a_n (נקרא גם המקדם המוביל) שונה מאפס. מסמנים: $\deg(p)=n$. אם $a_0\neq 0$ (המקדם החופשי) ו- $p(x)=a_0$ אז $\deg p=0$. לפולינום האפס $p(x)=0$ לא מוגדרת דרגה.

דוגמאות:

1. $p(x)=9x^4+x+1$ כאן
$\deg p=4$ ו- $a_4=9, a_3=a_2=0, a_1=1, a_0=1$.
2. $g(x)=6$ כאן $\deg g=0$ ו-$a_0=6$.

שורשים של פולינום

הגדרה: מספר ממשי[2] α נקרא שורש של פולינום p אם מתקיים $p(\alpha)=0$.

דוגמא: $\alpha=1$ הוא שורש של הפולינום $p(x)=x^2-1$.

דוגמא: פתרונות למשוואה ריבועית $ax^2+bx+c=0$ הם שורשים לפולינום $p(x)=ax^2+bx+c$ (p נקרא גם טרינום).

טענה: לכל פולינום מדרגה n יש לכל היותר n שורשים ממשיים (שחלקם אולי שווה זה לזה).
טענה זאת היא מסקנה פשוטה מהמשפט היסודי של האלגברה[3].

תרגיל: מצא את כל השורשים הממשיים של:

1. $p(x)=x^3-2x^2+x$
2. $g(x)=x^4-4$
3. $h(x)=x^4+5x^3+6x^2$

פתרון:

1. מחפשים ערכים של x אשר מאפסים את הפלינום: $p(x)=x^3-2x^2+x$. כלומר צריך:

$$p(x)=x^3-2x^2+x=0$$

---

[1] תרגום מילולי: רב-איבר

[2] בפרק של מספרים מרוכבים נראה כי לפולינום יכול להיות גם שורשים מרוכבים.

[3] המשפט היסודי של האלגברה: לכל פולינום מדרגה n יש n שורשים מרוכבים (שחלקם אולי שווה זה לזה). הוכחת משפט זה חורגת ממסגרת הספר.

אבל: $p(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$
כלומר:
$$p(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2 = 0$$
ולכן: $x_1 = 0\ , x_2 - 1$ הם השורשים לפולינום: $p(x) = x^3 - 2x^2 + x$

2. מחפשים ערכים של x אשר מאפסים את הפלינום: $g(x) = x^4 - 4$. כלומר צריך:
$$g(x) = x^4 - 4 = 0$$
ולאחר פישוט מקבלים:
$$g(x) = x^4 - 4 = (x^2+2)(x^2-2) = (x^2+2)\underbrace{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}_{=(x^2-2)} = 0$$
ולכן: $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ הם השורשים לפולינום: $g(x) = x^4 - 4$.

3. מחפשים ערכים של x אשר מאפסים את הפלינום: $h(x) = x^4 + 5x^3 + 6x^2$.
כלומר צריך:
$$h(x) = x^4 + 5x^3 + 6x^2 = 0$$
ולאחר פישוט מקבלים:
$$h(x) = x^4 + 5x^3 + 6x^2 = x^2(x^2 + 5x + 6) = x^2(x+2)(x+3) = 0$$
ולכן:
$x_1 = 0\ \ , x_2 = -2\ \ , x_3 = -3$ הם השורשים לפולינום:
$$h(x) = x^4 + 5x^3 + 6x^2$$

חילוק פולינומים

חילוק פולינומים מוגדר באופן אנלוגי לחילוק מספרים טבעיים, כלומר אם $m < n$ שני מספרים טבעיים אז קיימים שני מספרים q (מנה) ו- r (שארית) אי-שליללים כך ש-

$$\frac{n}{m} = q + \frac{r}{m}$$

או $n = q \cdot m + r$

אם השארית שווה אפס $(r = 0)$ נאמר ש- m מחלק את n. מסמנים $m|n$. אם $r \neq 0$ אז m אינו מחלק את n. מסמנים $m \nmid n$.

דוגמא: אם נחלק 32 ב- 10 המנה תהיה 3 והשארית 2 :

$$\frac{32}{10} = 3 + \frac{2}{10}$$

או $32 = 3 \cdot 10 + 2$

ולכן 10 אינו מחלק את 32. $(10 \nmid 32)$

משפט: יהיו $m(x), n(x)$ שני פולינומים כלשהם כך ש- $(\deg m > 0)$, אזי קיים זוג פולינומים יחיד (עד כדי כפל בסקלר) $q(x)$ (מנה) ו- $r(x)$ (שארית) כך ש-

$$n(x) = q(x) \cdot m(x) + r(x)$$

ומתקיים: $\deg r(x) < \deg m(x)$, $\deg q(x) = \deg n(x) - \deg m(x)$

דוגמאות:

1. עבור שני הפולינומים: $n(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$, $m(x) = (x+2)$ מתקיים:

$$\underbrace{x^3 + 2x^2 + 2x - 1}_{n(x)} = \underbrace{x^2}_{q(x)} \cdot \underbrace{(x+2)}_{m(x)} + \underbrace{2x-1}_{r(x)}$$

2. עבור שני הפולינומים: $n(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$, $m(x) = (x^2 - 3x + 2)$ מתקיים:

$$\underbrace{2x^3 - 5x^2 + x + 2}_{n(x)} = \underbrace{(2x+1)}_{q(x)} \cdot \underbrace{(x^2 - 3x + 2)}_{m(x)} + \underbrace{0}_{r(x)} = (2x+1)(x^2 - 3x + 2)$$

שיטת החילוק הארוך

שלבי החילוק:

1. חילוק המשתנה בעל החזקה הגבוהה ביותר במחולק, במשתנה בעל החזקה הגבוהה ביותר במחלק.
2. כופלים את התוצאה משלב 1 במחלק.
3. את התוצאה מהכפל מחסירים מיתרת המחלק.
4. חוזרים על תהליך זה עד שמקבלים פולינום עם דרגה קטנה מדרגת המחלק.

דוגמא: יהיו $m(x) = x^2 - 3x + 2$, $n(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$ שני פולינומים, נבצע את פעולת החילוק לפי השלבים שתוארו לעיל:

$$\begin{array}{l|l}
\multicolumn{1}{c}{\overbrace{2x+1}^{q(x)}} & \\
\hline
2x^3 - 5x^2 + x + 2 & x^2 - 3x + 2 \\
\cline{2-2}
\quad 2x^3 - 6x^2 + 4x & \\
\cline{1-1}
\quad x^2 - 3x + 2 & \\
\quad x^2 - 3x + 2 & \\
\cline{1-1}
\qquad \underbrace{0}_{r(x)} &
\end{array}$$

ולכן מתקיים: $\underbrace{2x^3-5x^2+x+2}_{n}=\underbrace{(2x+1)}_{q}\cdot\underbrace{(x^2-3x+2)}_{m}+\underbrace{0}_{r}$

תרגיל: חלק את שני הפולינומים: $m(x)=x-1$, $n(x)=2x^3+3x^2+5x-3$,
כלומר מצא את q,r המתאימים.

פתרון: נבצע את פעולת החילוק הארוך:

$$\begin{array}{l|l}
\multicolumn{1}{l}{2x^2+5x+10} & \\
\hline
2x^3+3x^2+5x-3 & x-1 \\
\cline{2-2}
2x^3-2x^2 & \\
\cline{1-1}
5x^2+5x-3 & \\
5x^2-5x & \\
\cline{1-1}
10x-3 & \\
10x-10 & \\
\cline{1-1}
7 &
\end{array}$$

ולכן מתקיים: $\underbrace{2x^3+3x^2+5x-3}_{n}=\underbrace{(2x^2+5x+10)}_{q}\cdot\underbrace{(x-1)}_{m}+\underbrace{7}_{r}$

הגדרה: פולינום נקרא פריק[1] אם ניתן לכתוב אותו כמכפלה של שני פולינומים שאינם מדרגה אפס.

פולינום נקרא אי-פריק אם לא ניתן לכתוב אותו כמכפלה של שני פולינומים שאינם מדרגה אפס.

דוגמאות:

1. $p(x)=x^2-1$ הוא פולינום פריק: $p(x)=(x-1)(x+1)$.
2. $q(x)=x^3+x$ הוא פולינום פריק: $q(x)=x(x^2+1)$.
3. $h(x)=x^2+1$ הוא פולינום אי-פריק.

טענה: כל פולינום מדרגה 1 הוא אי-פריק ויש לו שורש ממשי אחד.

טענה: פולינום מדרגה 2 הוא פריק אם"ם יש לו לפחות שורש ממשי אחד.

[1] מעל הממשיים, כי מעל המרוכבים כל פולינום מדרגה גדולה מ-1 הוא פריק (מסקנה מהמשפט היסודי של האלגברה).

טענה: מספר α הוא שורש של הפולינום p אס"ם $(x-\alpha)$ מחלק את p .

הגדרה: יהי α שורש של p . הריבוי האלגברי של α הוא המספר הטבעי k המקסימלי כך ש- $(x-\alpha)^k$ מחלק את p .

דוגמאות:

1. $p(x)=(x-1)(x+1)$ שני השורשים 1 **ו-** (-1) הם מריבוי 1 **.**
2. $p(x)=(x-1)^2(x+2)$ השורש 1 מריבוי 2 והשורש (-2) הוא מריבוי 1**.**

תרגיל: בדוק אם הפולינומים הבאים פריקים:

1. $p(x)=x^2+3$
2. $p(x)=2x^2-x-1$
3. $p(x)=x^4+1$

פתרון:

1. p הוא פולינום מדרגה 2 ואין לו שורשים ממשיים, לכן הוא אי-פריק.
2. בחישוב פשוט לדיסקרימיננטה אפשר לראות ש- p פריק.
3. p פריק, למרות שאין לו שורשים ממשיים, נשתמש בהשלמה לריבוע:

$$p(x)=x^4+1=(x^4+2x^2+1)-2x^2=(x^2+1)^2-\left(\sqrt{2}x\right)^2$$
$$=\left((x^2+1)-\sqrt{2}x\right)\left((x^2+1)+\sqrt{2}x\right)$$
$$=\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)$$

משפט: כל פולינום מדרגה גדולה מ- 2 הוא פריק.

תרגיל עצמי:

1. חלק את הפולינומים הבאים עם שארית, כלומר לכל זוג פולינומים m,n מצא את הזוג q,r המתאימים:
   א. $m(x)=x+1 \quad , \quad n(x)=3x^3+12x-5$
   ב. $m(x)=x^2+3 \quad , \quad n(x)=3x^4-x^3+x^2-2$
   ג. $m(x)=3x^2-3 \quad , \quad n(x)=18x^4-6x^3-15x^2+6x-3$
2. מצא פולינום ממעלה 6 ששורשיו הממשיים היחידים הם 1,2,3
3. פרק את הפולינום: x^4+9

פונקציה רציונלית

הגדרה: פונקציה מהצורה $R(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ כאשר $p(x),q(x)$ הם פולינומים, נקראת פונקציה רציונלית.

דוגמאות:

1. $R(x)=\dfrac{1}{x}$ היא פונקציה רציונלית.
2. $R(x)=\dfrac{x-5}{x^3+3x+2}$ היא פונקציה רציונלית.
3. $R(x)=\dfrac{2x^3+3x^2+5x-3}{x-1}$ היא פונקציה רציונלית.
4. $F(x)=\dfrac{\sqrt{x-5}}{x^3+3x+2}$ איננה פונקציה רציונלית כי $\sqrt{x-5}$ אינו פולינום.

הערה: בחילוק פולינומים ראינו כי פונקציה רציונלית בה דרגת המונה גדולה מדרגת המכנה ניתן לפשט ולהציג אותה בצורה נוספת ע"י חילוק ארוך של פולינומים. למשל הפונקציה בסעיף 3 מהדוגמאות הנ"ל ניתנת להצגה בצורה:

$$R(x)=\frac{2x^3+3x^2+5x-3}{x-1}=(2x^2+5x+10)+\frac{7}{x-1}$$

פונקציה רציונלית בה דרגת המונה קטנה מדרגת המכנה ניתנת גם היא לפישוט ולהצגה בצורה נוספת העוזרת בהרבה מקרים. ניקח למשל את הפונקציה: $R(x)=\frac{1}{x^2-1}$,
לפונקציה זו יש הצגה נוספת עם מכנה מדרגה 1: $R(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$.

שיטה זו נקראת <u>פירוק לשברים חלקיים</u>.

פירוק לשברים חלקיים

הגדרה: פונקציה רציונלית פשוטה היא פונקציה רציונלית בה הדרגה של הפולינום במונה קטנה מדרגת הפולינום במכנה ושניהם זרים (אין לשני הפולינומים שורש משותף) כלומר לא ניתן לצמצם אותה יותר (עד כדי צמצום מקדמים).

דוגמא:

1. $R(x)=\dfrac{1}{x+1}$ היא פונקציה רציונלית פשוטה.

2. $R(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ היא פונקציה רציונלית פשוטה הניתנת לפירוק לשברים חלקיים.

3. $R(x)=\dfrac{2x}{2x^2+2}$ למרות שניתן לצמצם את ה- 2 במונה ובמכנה הפונקציה היא פונקציה רציונלית פשוטה, כי זה צמצום מקדמים.

4. $R(x)=\dfrac{x^3+3x-1}{2x^2-5x+1}$ היא איננה פונקציה רציונלית פשוטה, כי דרגת המונה גדולה יותר מדרגת המכנה.

5. $R(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$ היא איננה פונקציה רציונלית פשוטה, כי המונה והמכנה לא זרים, כלומר ניתן לצמצם פונקציה זו:

$$\frac{x+2}{x^2-4}=\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{x-2}$$

מטרת הפירוק לשברים חלקיים היא להוריד את דרגת המכנה ולקבל סכום של פונקציות רציונליות יותר פשוטות. נראה כעת איך מפרקים לשברים חלקיים את הפונקציה הרציונלית הפשוטה $R(x)=\frac{1}{x^2-1}$. נשים לב שהמכנה בפונקציה זו הוא פולינום פריק: $x^2-1=(x+1)(x-1)$ לכן $R(x)=\frac{1}{(x+1)(x-1)}$. כמו כן שני הגורמים במכנה זרים וכן נקבל אותם במכנה אם נעשה מכנה משותף לשני שברים מהצורה $\frac{A}{x-1}$ ו- $\frac{B}{x+1}$ עם A ו- B מתאימים, כלומר:

$$R(x)=\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

למצוא את A ו- B המתאימים נעשה מכנה משותף לשני השברים $\frac{A}{x-1}$ ו- $\frac{B}{x+1}$ ונשווה מקדמים עם השבר המקורי $\frac{1}{(x+1)(x-1)}$, כלומר:

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{(A+B)x+A-B}{(x+1)(x-1)}$$

סה"כ:

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)}=\frac{(A+B)x+A-B}{(x+1)(x-1)}$$

כעת נחשב את A ו- B ע"י השוואת מקדמים של שני המונים. המקדם של x שזה $A+B$ שווה לאפס והמקדם החופשי $A-B$ שווה ל- 1 :

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \Rightarrow \quad A=\frac{1}{2} \quad , \quad B=-\frac{1}{2}$$

לכן

$$R(x)=\frac{1}{(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)$$

דרך נוספת לחשב את A ו- B היא ע״י הצבת מספרים במקום ה- x . כלומר אם בשוויון $1=(A+B)x+A-B$ נציב $x=1$ נקבל:

$$A=\frac{1}{2} \quad \Leftarrow 1=2A \quad \Leftarrow \quad 1=A+B+A-B$$

ואם במקום ה- x נציב -1 נקבל:

$$B=-\frac{1}{2} \quad \Leftarrow 1=-2B \quad \Leftarrow \quad 1=-A-B+A-B$$

מקרים נוספים לפירוק פונקציה רציונלית לשברים חלקיים נראה בתרגיל הבא:

תרגיל: פרק לשברים חלקיים את הפונקציות הרציונליות הבאות:

1. $\frac{3}{(x+1)(x+2)}$
2. $\frac{5x+6}{2x^2+3x}$
3. $\frac{x}{x^2+2x-3}$
4. $\frac{x^2+x+4}{x^3+4x^2-5x}$
5. $\frac{x+2}{x^2(x-2)}$
6. $\frac{-3x^2-11x-11}{(x+2)^2(x+1)}$
7. $\frac{x^3-x+1}{x^5-2x^4+x^3}$
8. $\frac{2x-1}{x(x^2+1)}$
9. $\frac{x^2+3x+14}{(x^2+2)(x+4)}$
10. $\frac{3x^3-5x^2+x-3}{x^4+x^2}$

פתרון:

.1

$$\frac{3}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{(A+B)x + 2A + B}{(x+1)(x+2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + B = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = -3 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{(x+1)(x+2)} = \frac{3}{x+1} - \frac{3}{x+2}$$

.2

$$\frac{5x+6}{2x^2+3x} = \frac{5x+6}{x(2x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x+3} = \frac{A(2x+3) + Bx}{x(2x+3)}$$

$$= \frac{(2A+B)x + 3A}{x(2x+3)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A + B = 5 \\ 3A = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{5x+6}{2x^2+3x} = \frac{2}{x} + \frac{1}{2x+3}$$

.3

$$\frac{x}{x^2+2x-3} = \frac{x}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x+3)}{(x+3)(x-1)}$$

נציב $x = 1$ במשוואה $A(x-1) + B(x+3) = x$ ונקבל $4B = 1$. נציב $x = -3$ ונקבל $-4A = -3$, לכן $B = 1/4$, $A = 3/4$, כלומר:

$$\frac{x}{x^2+2x-3} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{x+3} + \frac{1}{x-1}\right)$$

.4

$$\frac{x^2+x+4}{x^3+4x^2-5x} = \frac{x^2+x+4}{x(x^2+4x-5)} = \frac{x^2+x+4}{x(x+5)\,(x-1)}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+5} + \frac{C}{x-1} = \frac{A(x+5)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+5)}{x(x+5)\,(x-1)}$$

נחשב את A, B, C ע״י הצבת ערכים של x במשוואה:

$A(x+5)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+5) = x^2 + x + 4$

נציב $x = 0$ ונקבל $-5A = 4$ $\Leftarrow$ $A = -4/5$

נציב $x = -5$ ונקבל $30B = 24$ $\Leftarrow$ $B = 4/5$

נציב $x = 1$ ונקבל $6C = 6$ $\Leftarrow$ $C = 1$

סה״כ:

$$\frac{x^2+x+4}{x^3+4x^2-5x} = \frac{-4}{5x} + \frac{4}{5(x+5)} + \frac{1}{x-1}$$

5. המכנה בפונקציה הרציונלית $\frac{x+2}{x^2(x-2)}$ מכיל את הגורם x^2 , לכן אנו מניחים כי הפונקציה מתפרקת לשלוש פונקציות רציונליות פשוטות:

$$\frac{x+2}{x^2(x-2)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-2}=\frac{A(x-2)+Bx(x-2)+Cx^2}{x^2(x-2)}$$

נחשב את A,B,C ע״י הצבת ערכים של x במשוואה:

$$A(x-2)+Bx(x-2)+Cx^2=x+2$$

נציב $x=0$ ונקבל $-2A=2 \Leftarrow A=-1$

נציב $x=2$ ונקבל $4C=4 \Leftarrow C=1$

נציב $x=1$ ונקבל $-A-B+C=3$ נשתמש בערכים של A ו- C שמצאנו ונקבל $1-B+1=3 \quad \Leftarrow \quad B=-1$ סה״כ:

$$\frac{x+2}{x^2(x-2)}=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}$$

6. באופן דומה לסעיף קודם, רואים כי המכנה של הפונקציה $\frac{-3x^2-11x-11}{(x+2)^2(x+1)}$ מכיל את הגורם $(x+2)^2$ ולכן אנו מניחים כי הפונקציה מתפרקת באופן הבא:

$$\frac{-3x^2-11x-11}{(x+2)^2(x+1)}=\frac{A}{(x+2)^2}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+1}$$

$$=\frac{A(x+1)+B(x+2)(x+1)+C(x+2)^2}{(x+2)^2(x+1)}$$

נחשב את A,B,C ע״י הצבת ערכים של x במשוואה:

$$A(x+1)+B(x+2)(x+1)+C(x+2)^2=-3x^2-11x-11$$

נציב $x=-2$ ונקבל $-A=-3 \Leftarrow A=1$

נציב $x=-1$ ונקבל $C=-3$

נציב $x=0$ ונקבל $A+2B+4C=-11$ נשתמש בערכים של A ו- C שמצאנו ונקבל: $1+2B-12=-11 \quad \Leftarrow \quad B=0$ סה״כ:

$$\frac{-3x^2-11x-11}{(x+2)^2(x+1)}=\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{3}{x+1}$$

7. קל לראות כי המכנה בפונקציה $\frac{x^3-x+1}{x^5-2x^4+x^3}$ מתפרק בצורה $x^4-2x^3+x^2=x^3(x-1)^2$ כלומר הפונקציה מתפרקת לחמשה שברים פשוטים:

$$\frac{x^3-x+1}{x^5-2x^4+x^3}=\frac{x^3-x+1}{x^3(x-1)^2}=\frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{D}{(x-1)^2}+\frac{E}{x-1}$$

$$=\frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)^2+Cx^2(x-1)^2+Dx^3+Ex^3(x-1)}{x^3(x-1)^2}$$

אחרי חישובים נקבל $A=1\ ,\ B=1\ ,\ C=1\ ,\ D=1\ ,E=-1$ ולכן:

$$\frac{x^3-x+1}{x^5-2x^4+x^3}=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}$$

.8 רואים כי המכנה של הפונקציה $\frac{2x-1}{x(x^2+1)}$ מכיל גורם אי-פריק מדרגה 2 : x^2+1 .
לכן, לאחר פירוק לשברים חלקיים המונה בשבר עם המכנה x^2+1 יכול להיות פולינום מדרגה 1 , כלומר:

$$\frac{2x-1}{x(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x}=\frac{x(Ax+B)+C(x^2+1)}{x(x^2+1)}$$

אחרי חישובים נקבל $A=1\ ,\ B=2\ ,\ C=-1$ ולכן:

$$\frac{2x-1}{x(x^2+1)}=\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{1}{x}$$

.9 באופן דומה לסעיף קודם:

$$\frac{x^2+3x+14}{(x^2+2)(x+4)}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{C}{x+4}$$

אחרי חישובים נקבל $A=0\ ,\ B=3\ ,\ C=1$, כלמר:

$$\frac{x^2+3x+14}{(x^2+2)(x+4)}=\frac{3}{x^2+2}+\frac{1}{x+4}$$

.10 נפרק לגורמים את המכנה בפונקציה $\frac{3x^3-5x^2+x-3}{x^4+x^2}$ ונקבל $\frac{3x^3-5x^2+x-3}{x^2(x^2+1)}$.
פירוק זה מראה כי המכנה מכיל גורם אי-פריק וגם גורם עם ריבוי שתיים, לכן הפירוק הכללי יהיה מהצורה הבאה:

$$\frac{3x^3-5x^2+x-3}{x^2(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x^2}+\frac{D}{x}$$

אחרי חישובים נקבל $A=2\ ,\ B=-2\ ,\ C=-3\ ,\ D=1$ ולכן :

$$\frac{3x^3-5x^2+x-3}{x^2(x^2+1)}=\frac{2x-2}{x^2+1}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}$$

פונקציה טריגונומטרית

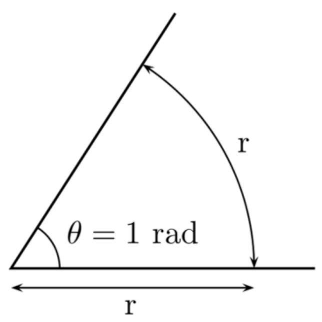
פונקציה טריגונומטרית היא פונקציה המקשרת בין זוויות במושלש ישר זווית לאורכי צלעותיו. הפונקציות הטריגונומטריות המוכרות ביותר הן סינוס sin, קוסינוס cos,וטנגנס tg.

נתחיל בהגדרת שתי יחידות מידה[1] למדידת גודל של זווית, מעלה ורדיאן.

רדיאנים ומעלות

הגדרה: מעלה היא יחידת מידה למדידת גודל של זווית, אשר נקבעה ע״פ שיטת הספירה הבבלית[2] שקובעת למעגל 360 מעלות. כלומר זווית בגודל מעלה היא זווית שגודלה הוא $1:360$ ביחס למעגל, ומסמנים : $1°$.

הגדרה: רדיאן היא יחידת מידה למדידת גודל של זווית, כאשר זווית בגודל רדיאן אחד היא זווית היוצאת ממרכז מעגל ונוצרת ע״י קשת שאורכה שווה לרדיוס המעגל. (כמתואר בשרטוט).



כיוון שהיקף המעגל שווה ל- $2\pi r$, במעגל יש 2π רדיאנים.

(π פאי, הוא מספר אי-רציונלי השווה בערך ל- 3.14159 והוא מייצג את היחס הקבוע בין היקף המעגל לקוטרו)

להלן טבלת השוואת רדיאנים למעלות :

רדיאנים	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π	$3\pi/2$	2π
מעלות	30	45	60	90	120	180	270	360

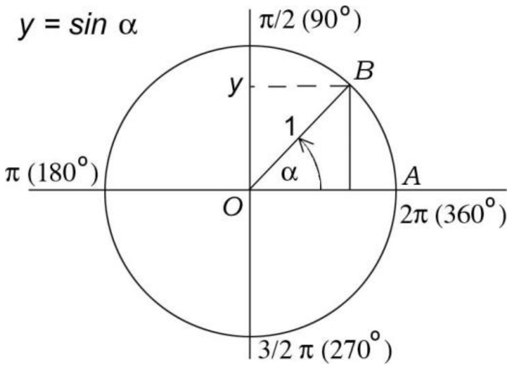
יחידת הרדיאן אינה שרירותית כמו המעלה, ולכן היא מקובלת יותר במתמטיקה.

[1] יחידות מידה נוספות : גראד, ואלפית.

[2] שיטת הספירה הבבלית התבססה על בסיס של 60 . משתמשים בשיטה זאת לחלק שעה ל-60 דקות ודקה ל-60 שניות.

סינוס "sin"

הגדרה: סינוס של זווית הוא היחס בין הניצב מול הזווית ליתר במשולש ישר זווית.



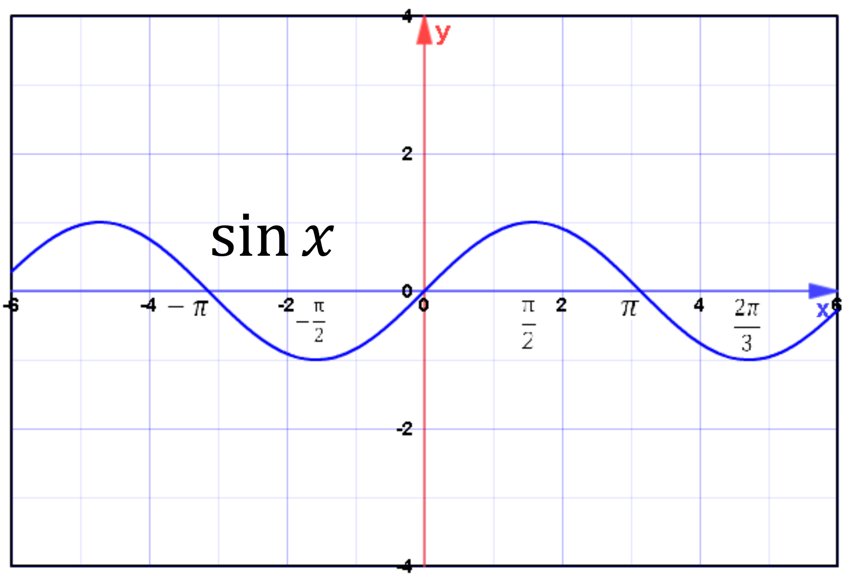
הגדרה זאת היא הגדרה בסיסית, את הסינוס ניתן להגדיר בצורה לא שונה בהרבה, וזה בלהסתכל על הסינוס כאורך הניצב המקביל לציר ה-y במשולש ישר זווית שהיתר שלו הוא רדיוס מעגל היחידה[1] וניצביו ניצבים לצירים.

היתרון בהגדרה זאת, זה שבאמצעות סיבובים בכיוון החיובי[2] ובכיוון השלילי על מעגל היחידה ניתן לעבור על כל המספרים הממשיים, בצורה זאת ניתן להגדיר את הסינוס כפונקציה לכל מספר ממשי.

תכונות פונקצית הסינוס:

1. מוגדרת לכל x ממשי.
2. התמונה שלה היא הקטע $[-1,1]$ (היתר $\leq$ לניצב, במשולש ישר זווית).
3. הסינוס הינה פונקציה אי-זוגית, כלומר: $\forall x:\ \sin(-x) = -\sin x$
4. הסינוס הינה פונקציה מחזורית בעלת מחזור של 2π, כלומר:
   $\forall x:\ \sin(x) = \sin(x + 2\pi k)$ עבור $k \in \mathbb{Z}$ כלשהו.
5. הסינוס מתאפס בנקודות πk עבור $k \in \mathbb{Z}$ כלשהו.

הגרף של פונקצית הסינוס:



[1] מעגל היחידה הוא מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו שווה ל- 1 .

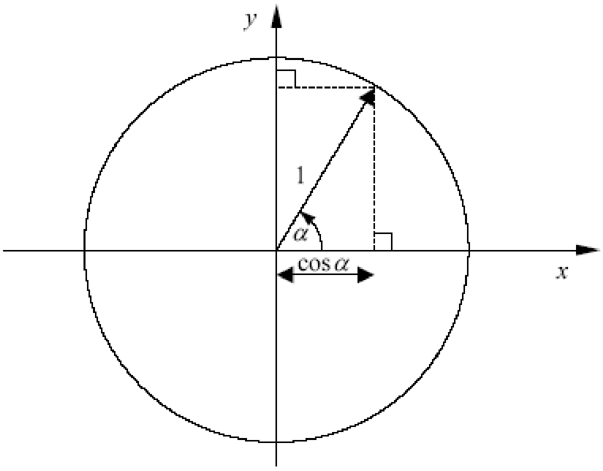
[2] נגד כיוון השעון

קוסינוס "cos"

הגדרה: קוסינוס של זווית הוא היחס בין הניצב ליד הזווית ליתר במשולש ישר זווית.

באופן דומה לסינוס, ניתן להסתכל על הקוסינוס כאורך הניצב המקביל לציר ה-x במשולש ישר זווית שהיתר שלו הוא רדיוס מעגל היחידה וניצביו ניצבים לצירים.

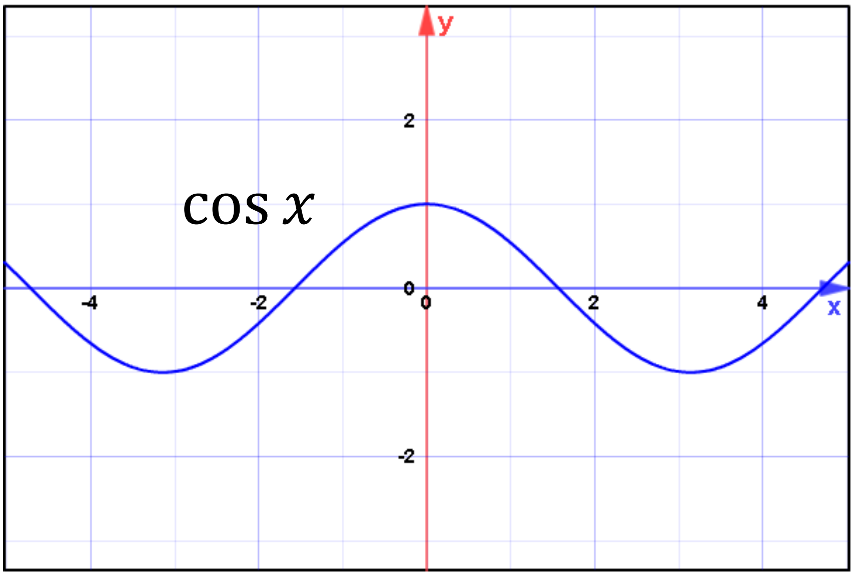
בצורה זאת ניתן להגדיר את הקוסינוס כפונקציה לכל מספר ממשי.



תכונות של פונקצית הקוסינוס:

1. מוגדרת לכל x ממשי.
2. התמונה שלה היא הקטע $[-1,1]$.
3. הקוסינוס הינה פונקציה זוגית, כלומר: $\forall x: \cos(-x) = \cos x$
4. הקוסינוס הינה פונקציה מחזורית בעלת מחזור של 2π , כלומר:
   $\forall x: \ \cos x = \cos(x + 2\pi k)$ עבור $k \in \mathbb{Z}$ כלשהו.
5. הקוסינוס מתאפס בנקודות $\frac{\pi}{2} + \pi k$ עבור $k \in \mathbb{Z}$ כלשהו.

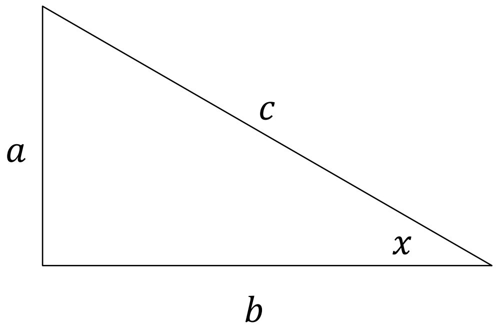
הגרף של פונקצית הקוסינוס:



טנגנס "tg"

הגדרה: טנגנס הזווית הוא היחס בין הניצב שמול הזווית לניצב שלידה במשולש ישר זווית.

בהגדרה זאת רואים את הקשר בין הסינוס, הקוסינוס והטנגנס: $\mathrm{tg}\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$



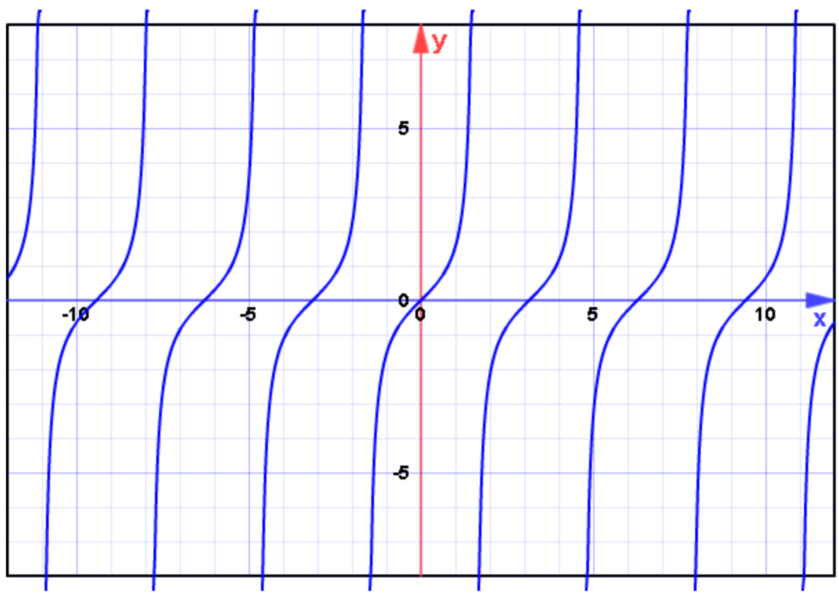
$$\sin x = \frac{a}{c} \quad , \quad \cos x = \frac{b}{c} \quad , \quad \mathrm{tg}\,x = \frac{a}{b}$$

$$\mathrm{tg}\,x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}$$

תכונות של פונקצית הטנגנס:

1. מוגדרת לכל x ממשי פרט לנקודות שמתאפס בהן הקוסינוס, כלומר $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$.
2. התמונה שלה היא כל $\mathbb{R}$.
3. הטנגנס הינה פונקציה אי-זוגית, כלומר: $\forall x : \mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\,x$
4. הטנגנס הינה פונקציה מחזורית בעלת מחזור של π, כלומר:
   $\forall x : \mathrm{tg}\,x = \mathrm{tg}(x + \pi k)$ עבור $k \in \mathbb{Z}$ כלשהו.
5. הפונקציה מתאפסת בכל הנקודות πk עבור $k \in \mathbb{Z}$ כלשהו.

הגרף של פונקצית הטנגנס:



זהויות טריגונומטריות

הזהות של פיתגורס:

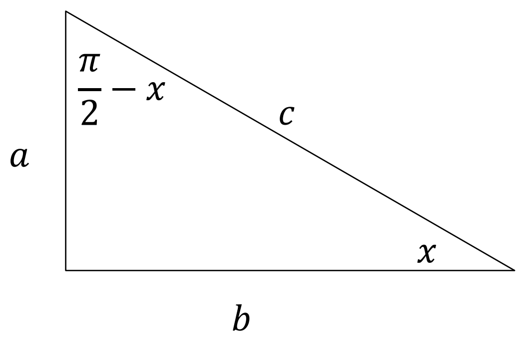
$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

זהות זאת נובעת ישירות ממשפט פיתגורס:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2} \underbrace{=}_{\text{פיתגורס}} \frac{c^2}{c^2} = 1$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad , \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x}$$

זהות זאת נובעת מהגדרת הסינוס והקוסינוס:



מצד אחד יודעים כי: $\cos x = \frac{b}{c}$

ומצד שני: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{b}{c}$ ולכן:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{b}{c} = \cos x$$

ובאופן שקול מראים כי:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{a}{c} = \sin x$$

$$\boxed{1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

הוכחה.

$$1 + \mathrm{tg}^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

זהויות מכפלה לסכום:

1. $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$

2. $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$

3. $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$

4. $2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$

אם נציב $\phi = \alpha - \beta$, $\theta = \alpha + \beta$ נקבל זיהויות סכום למכפלה:

1. $\cos\phi - \cos\theta = 2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$
2. $\cos\phi + \cos\theta = 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$
3. $\sin\theta + \sin\phi = 2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$
4. $\sin\theta - \sin\phi = 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$

אם $\alpha = \beta$ נקבל:

1. $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$
2. $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$
3. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
4. $cos\, 2\alpha = cos^2\,\alpha - sin^2\,\alpha$

ערכים שימושיים של קוסינוס וסינוס:

$$\cos 0 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

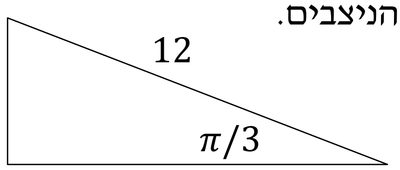
$$\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = \sin 0 = 0$$

תרגיל עצמי:

1. חשב ללא מחשבון את הביטוי: $2\cos\frac{9\pi}{2} + \sin -\frac{7\pi}{3} + \text{tg}\frac{5\pi}{4}$

2. במשולש ישר זווית אורך היתר הוא 12 וגודל הזווית בין אחד הניצבים והיתר הוא $\frac{\pi}{3}$. מצא את אורכי הניצבים.



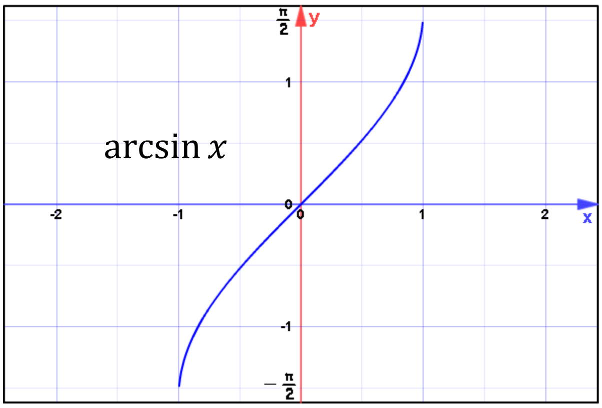
3. מצא את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של הביטוי: $8\sin^2(-5x) - 6$

4. בדוק את זוגיות הפונקציות הבאות:
   1. $f(x) = \cos x + x\sin x$
   2. $f(x) = 7x^3\sin^2 x - 6x^5$

5. בדוק את מונוטוניות הפונקציה:
   1. $f(x) = 2\sin^2 x - 2\cos^2 x$ בתחום $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
   2. $f(x) = \cos(2x) - 1$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

פונקציות טריגונומטריות הפוכות

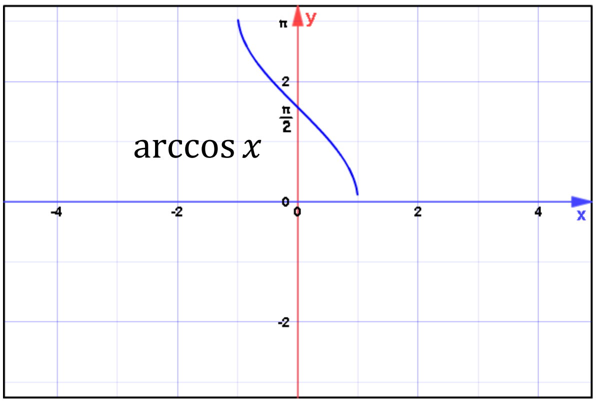
$\arcsin x$ היא פונקציה הפוכה של $\sin x$



תכונות:

- תחום ההגדרה: $[-1,1]$.
- תמונה: $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
- מונוטונית עולה ממש.
- פונקציה אי-זוגית.
- מתאפסת בנקודה $x=0$.

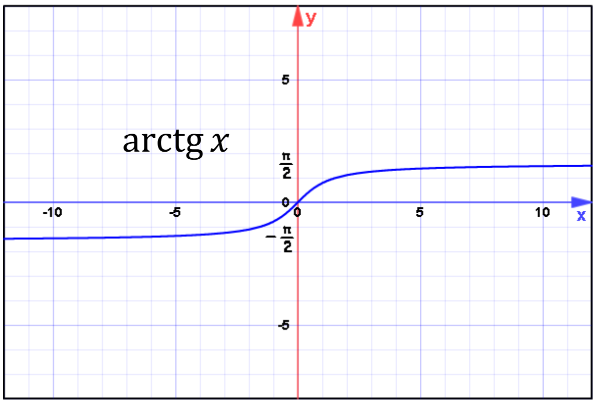
$\arccos x$ היא פונקציה הפוכה של $\cos x$



תכונות:

- תחום ההגדרה: $[-1,1]$.
- תמונה: $[0,\pi]$.
- מונוטונית יורדת ממש.
- $\arccos x=\pi-\arccos(-x)$.
- מתאפסת בנקודה $x=1$.

$\operatorname{arctg} x$ היא פונקציה הפוכה של $\operatorname{tg} x$



תכונות:

- תחום ההגדרה כל $\mathbb{R}$.
- תמונה: $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.
- מונוטונית עולה ממש.
- פונקציה אי-זוגית.
- מתאפסת בנקודה $x=0$.

זהויות שימושיות:

1. $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$

2. $$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & , \ x>0\\ -\frac{\pi}{2} & , \ x<0\end{cases}$$

3. $\sin(2\arccos x)=2x\sqrt{1-x^2}$

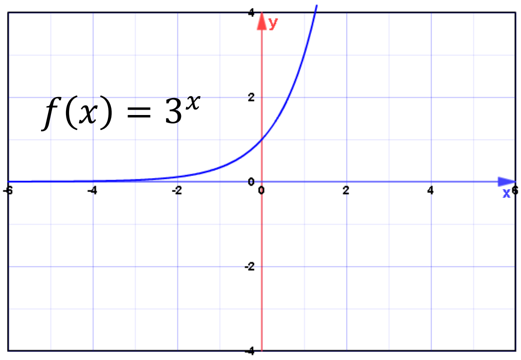
פונקציה מערכית ופונקציה לוגריתמית

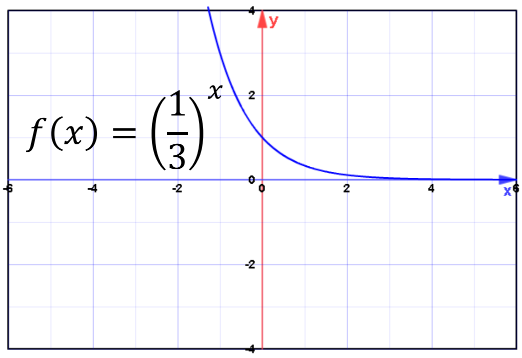
הגדרה: פונקציה מערכית היא פונקציה מהצורה $f(x)=a^x$ כאשר $a>0$.

תכונות:

- תחום ההגדרה כל $\mathbb{R}$.
- תמונה $\mathbb{R}_+=(0,\infty)$ פרט למקרה $a=1$ הפונקציה קבועה ושווה ל 1.
- עבור $a>1$ הפונקציה מונוטונית עולה ממש.
- עבור $a<1$ הפונקציה מונוטונית יורדת ממש.
- $(0,1)$ היא נקודת החיתוך עם ציר ה-y לכל a.
- אין נקודות חיתוך עם ציר ה- x.

דוגמאות:

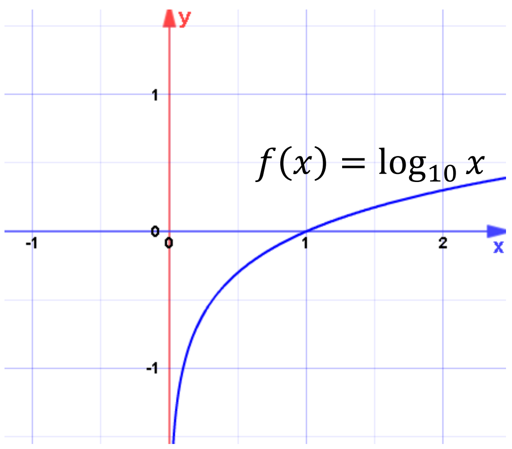




הגדרה: פונקציה לוגריתמית היא פונקציה הפוכה של פונקציה מערכית, והיא מהצורה $f(x)=\log_a x$ כאשר a הוא ממשי חיובי ושונה מ-1, והיחס: $a^b=x \Leftrightarrow \log_a x=b$.

תכונות:

- תחום הגדרה: $\mathbb{R}_+=(0,\infty)$.
- תמונה: כל $\mathbb{R}$.
- עבור $a<1$ הפונקציה מונוטונית יורדת ממש.
- עבור $a>1$ הפונקציה מונוטונית עולה ממש.
- הפונקציה מתאפסת בנקודה $x=1$.
- אין נקודות חיתוך עם ציר ה-y.



הערה: נהוג לכתוב לוגריתם לפי בסיס 10 ללא בסיס

כלומר: $\log x=\log_{10}x$.

חוקי לוגריתם:

- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b$
- $a^{\log_a b} = b$
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

תרגיל: חשב את x :

1. $\log x - 3 = 2\log\sqrt{5}$
2. $1 + \log_3 \frac{x}{3} = \frac{1}{3} - 2\log_3 9 - \log_5 25$

פתרון:

1. $\log x = 3 + 2\log 5^{1/2} = \log 10^3 + \frac{2}{2}\log 5 = \log 1000 + \log 5 = \log 5000$

$$x = 5000$$

2. אגף שמאלי שווה ל:

$$1 + \log_3 \frac{x}{3} = 1 + \log_3 x - \log_3 3 = \log_3 x$$

אגף ימני שווה ל:

$$\frac{1}{3} - 2\log_3 9 - \log_5 25 = \frac{1}{3} - 2\log_3 3^2 - \log_5 5^2 = \frac{1}{3} - 4 - 2 = -\frac{17}{3}$$

סה"כ:

$$\log_3 x = -\frac{17}{3} \quad \Longrightarrow x = 3^{-17/3}$$

תרגיל עצמי:

1. חשב את x :
   1. $\log_6 x + \log_6 \sqrt[4]{4} = \frac{1}{3}\log_6 12$
   2. $\log_2 2x = 1 + \sqrt{\log_2 x} + 3$
2. מצא את הפתרונות של מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_3 y = 3 \\ \log_2 x^2 + \log_3 y^2 = 2 \end{cases}$$

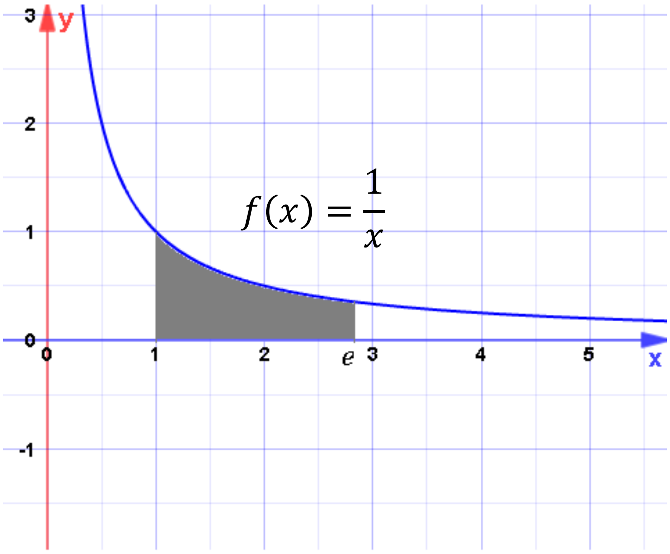
3. מצא את הפתרונות של אי-השוויונים:

1. $\log_x \frac{2x+6}{x-3} \geq 1$

2. $\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x+8}{4-x}} \leq 1$

לוגריתם טבעי "ln"

הגדרה: לוגריתם טבעי או "ln" הוא לוגריתם שבסיסו הוא המספר e, שהוא מספר אי-רציונלי השווה בערך ל- 2.718

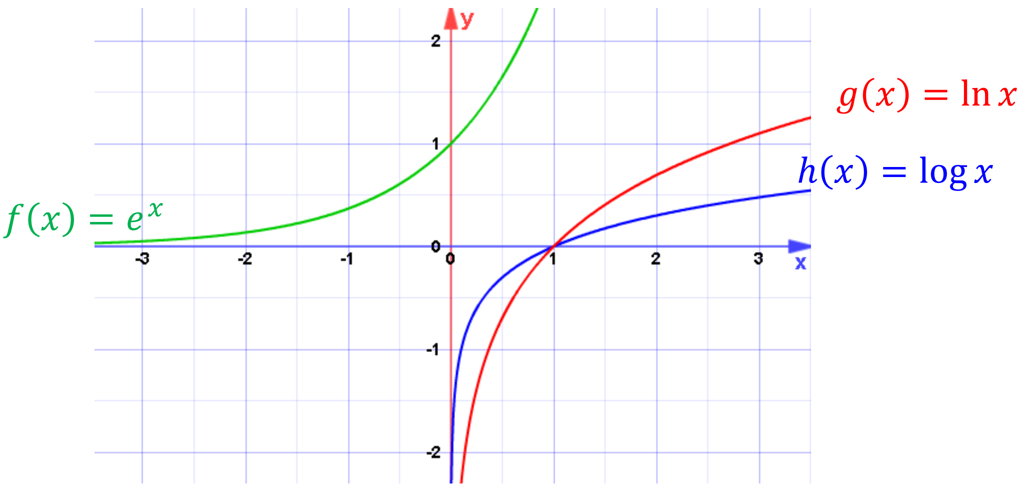


העשרה: המספר e לאונרד: אוילר[1] סימן מספר זה באות e.הסיבה לזה אינה ידועה, אבל סביר שזה בגלל שהאות e היא האות הראשונה בשם משפחתו (Euler). למספר זה יש הרבה שימושים באנליזה, ולהגדרת מספר זה יש כמה דרכים. אחת הדרכים להגדרתו:

e הוא המספר שעבורו השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $\frac{1}{x}$ וציר ה-x מ-1 ועד אליו שווה ל-1.

$\ln x$ היא פונקציה הפוכה של e^x. נהוג גם לסמן את הפונקציה e^x ב- $\exp(x)$ מהמילה אקספוננט.

פונקציה מערכית זאת מופיעה בהרבה תחומים באנליזה.



הערה: חוקי $\ln$ הם אותם חוקים של $\log$.

[1] אוילר היה מתמטיקאי ופיזיקאי שוויצרי, הנחשב למתמטיקאי המוביל והבולט ביותר בכל הזמנים.

תרגיל: עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, בדוק אם היא מונוטונית ואם היא חח"ע בתחום הגדרתה:

1. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$
2. $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

פתרון:

1. f אינה מונוטונית, ניקח למשל: $x_1 = -1 < x_2 = 0 < x_3 = 1$ ונקבל:

$$f(x_1) = \ln 2$$
$$f(x_2) = \ln 1 = 0$$
$$f(x_3) = \ln 2$$

f אינה חח"ע כי $f(x_1) = f(x_2)$ אבל $x_1 \neq x_2$.

2. f עולה ממש ולכן היא חח"ע בתחום ההגדרה: $(0, \infty)$. נוכיח זאת: לכל $x_1 < x_2$ מתקיים $e^{\ln x_1} < e^{\ln x_2}$ לכן $\ln x_1 < \ln x_2$. נחזור על תהליך זה פעמיים נוספות ונקבל $\ln(\ln(\ln x_1)) < \ln(\ln(\ln x_2))$.

הערה: פונקציה עולה המופעלת על שני האגפים באי-שוויון לא משנה את סימן אי-השוויון.

תרגיל: מצא תחום ההגדרה של $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$ והוכח שהיא פונקציה אי-זוגית.

פתרון: תחום ההגדרה הוא כל $\mathbb{R}$. נוכיח ש- f היא פונקציה אי-זוגית, כלומר צריך להוכיח

$$\forall x : f(-x) = -f(x)$$

$$f(-x) = \ln\left(-x + \sqrt{1 + x^2}\right) = \ln\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right)$$

$$= \ln\left(\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right) \cdot \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2} + x}\right) = \ln\left(\frac{1 + x^2 - x^2}{\sqrt{1 + x^2} + x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + x}\right) = \ln\left(\left(\sqrt{1 + x^2} + x\right)^{-1}\right)$$

$$= -\ln\left(\sqrt{1 + x^2} + x\right) = -f(x)$$

■

פעולות אלמנטריות

הגדרה: יהיו f,g שתי פונקציות. הפעולות:

- חיבור: $f(x)+g(x)$
- חיסור: $f(x)-g(x)$
- כפל: $f(x)\cdot g(x)$
- חילוק: $f(x)/g(x)$
- הרכבה: $f\circ g$ או $g\circ f$

הפעולות האלמנטריות בין פונקציות.

תרגיל: יהיו $g(x)=\sqrt{x+2}$, $f(x)=x^2-1$, מצאו את:

1. $f\circ g$
2. $(g\circ f)(3)$

פתרון:

1. $f\circ g=f\big(g(x)\big)=\big(g(x)\big)^2-1=\left(\sqrt{x+2}\right)^2-1=x+2-1=x+1$
2. $(g\circ f)(3)=g\big(f(3)\big)=\sqrt{f(3)+2}=\sqrt{(3^2-1)+2}=\sqrt{10}$

תרגיל: יהיו $g(x)=e^x$, $f(x)=x^2+2x$. מצא את הפונקציות הבאות:

1. $f\circ g$
2. $f\circ f$
3. $g\circ f$
4. $g\circ g\circ g$

פתרון:

1. $f\circ g=f\big(g(x)\big)=(e^x)^{\mathbf{2}}+2e^x=e^{2x}+2e^x$

2. $f\circ f=f\big(f(x)\big)=(x^2+2x)^2+2(x^2+2x)=x^4+4x^3+6x^2+4x$

3. $g\circ f=g\big(f(x)\big)=e^f=e^{x^2+2x}$

4. $g\circ g\circ g=g\Big(g\big(g(x)\big)\Big)=e^{e^{e^x}}$

תרגיל: מצא את $f(x)$ אם ידוע כי $f(x-1)=x^2+x-2$.

פתרון:

נציב $x=m+1$ ונמצא את $f(m)$ וזה לכל m כלומר זה שקול ל- $f(x)$.

$$f(m+1-1)=(m+1)^2+(m+1)-2=m^2+3m=m(m+3)$$

קיבלנו:

$$f(m+1-1)=f(m)=m(m+3)$$

לכן:

$$f(x)=x(x+3)$$

הגדרה: כל פונקציה המתקבלת ע"י מספר סופי של פעולות אלמנטריות בין הפונקציות:

- פונקציה טריגונומטרית $\sin x$
- פונקציה טריגונומטרית הפוכה $\arcsin x$
- פונקציה מערכית e^x והלוגריתם הטבעי $\ln x$

נקראת פונקציה אלמנטרית.

דוגמאות:

1. כל פונקציה קבועה היא אלמנטרית: $f(x)=\frac{e^x}{e^x}=1$
2. $f(x)=x$ היא פונקציה אלמנטרית: $x=\ln e^x$
3. כל פולינום הוא פונקציה אלמנטרית, כי זה כפל וסכום של פונקציות קבועות והפונקציה $f(x)=x$.
4. כל פונקציה רציונלית היא פונקציה אלמנטרית (פונקציה רציונלית היא מנה של פולינומים).
   לדוגמא: $R(x)=\frac{x^2+x-1}{x^3+2x+5}$.
5. כל פונקציה מערכית היא פונקציה אלמנטרית: $e^{x\ln a}=a^x$
6. שורש x מכל סדר היא פונקציה אלמנטרית: $x^a=e^{a\ln x}$
7. פונקציות מהצורה: $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$, $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$
8. פונקציות טריגונומטריות הפוכות: $\operatorname{arctg} x$, $\arccos x$
9. פונקציות היפרבוליות: $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ (סינוס היפרבולי) , $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ (קוסינוס היפרבולי) ו- $\operatorname{tgh}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ (טנגנס היפרבולי) , הן פונקציות אלמנטריות.

דוגמאות:

דוגמאות לפונקציות שאינן אלמנטריות:

1. ערך שלם: $f(x) = \lfloor x \rfloor$

2. $f(x) = \begin{cases} 2-x, & x<0 \\ \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x<0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$

תרגיל: הוכח כי הפונקציות הבאות הן פונקציות אלמנטריות:

1. $f(x) = \arccos x$.

2. $f(x) = |x|$ (ערך מוחלט).

3. $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x<0 \\ 8x+1, & x \geq 0 \end{cases}$.

פתרון:

1. נשתמש בזהות טריגונומטרית: $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$.
כלומר $\arccos x$ היא חיסור בין שתי פונקציות אלמנטריות, לכן היא פונקציה אלמנטרית.

2. f היא הרכבה של פונקציות אלמנטריות:
$$f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$$

3. קל לראות ש- $f(x) = 3|x| + 5x + 1$. כלומר f היא סכום של פונקציות אלמנטריות, לכן היא גם אלמנטרית.

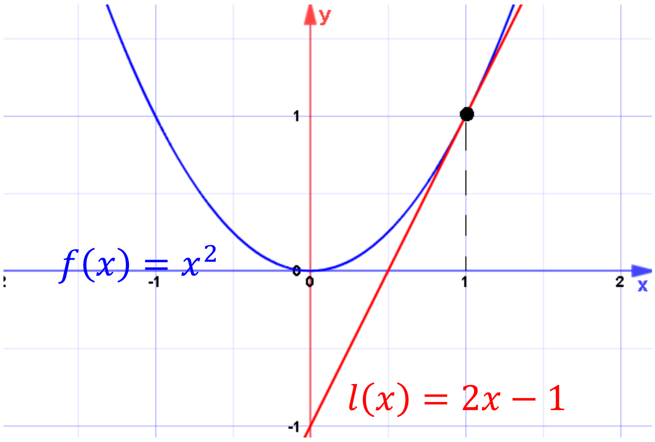
הערה: אם g, h שתי פונקציות אלמנטריות המקיימות $g(x_0) = h(x_0)$ אז כל פונקציה מהצורה:

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \leq x_0 \\ h(x), & x > x_0 \end{cases}$$

היא פונקציה אלמנטרית.

נגזרת ומשמעות גיאומטרית

הנגזרת[1] של פונקציה ממשית היא פונקציה המתארת את קצב ההשתנות של הפונקציה המקורית בכל נקודה בה היא (הנגזרת) קיימת.



משמעות גיאומטרית לנגזרת: הנגזרת של פונקציה בנקודה x_0 שווה לשיפוע הישר המשיק לגרף הפונקציה באותה נקודה x_0.

דוגמא: ישר המשיק לפונקציה $f(x) = x^2$ בנקודה $x_0 = 1$ הוא $l(x) = 2x - 1$ לכן הנגזרת של f בנקודה $x_0 = 1$ שווה ל- $l(x_0) = l(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 2$.

לנגזרת יש כמה סימונים מקובלים: אם f פונקציה גזירה אז הנגזרת של f מסמנים באופן הבא:

$f'(x)$ או $\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}}$.

נגזרות של פונקציות אלמנטריות

הפונקציה	הנגזרת
$\boldsymbol{f(x) = c}$ (פונקציה קבועה)	$\boldsymbol{f'(x) = 0}$
$\boldsymbol{x^{\alpha}}$	$\boldsymbol{\alpha x^{\alpha-1}}$
$\boldsymbol{\sin x}$	$\boldsymbol{\cos x}$
$\boldsymbol{\cos x}$	$\boldsymbol{-\sin x}$
$\boldsymbol{\operatorname{tg} x}$	$\boldsymbol{\frac{1}{\cos^2 x}}$
$\boldsymbol{\arcsin x}$	$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$
$\boldsymbol{\arccos x}$	$\boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

[1] הגדרה פורמלית לנגזרת באמצעות מושג הגבול תלמדו בקורס חדו"א.

הפונקציה	הנגזרת
$\mathbf{arctg}\,\boldsymbol{x}$	$\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}$
$\boldsymbol{e^x}$	$\boldsymbol{e^x}$
$\mathbf{ln}\,\boldsymbol{x}$	$\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$
$\boldsymbol{a^x}$	$\boldsymbol{a^x}\cdot\mathbf{ln}\,\boldsymbol{a}$
$\mathbf{sinh}\,\boldsymbol{x}$	$\mathbf{cosh}\,\boldsymbol{x}$
$\mathbf{cosh}\,\boldsymbol{x}$	$\mathbf{sinh}\,\boldsymbol{x}$

כללי גזירה

משפט. אם f,g שתי פונקציות גזירות ו-c קבוע כלשהו אז:

א. $\big(cf(x)\big)' = cf'(x)$

ב. $\big(f(x) \pm g(x)\big)' = f'(x) \pm g'(x)$

ג. $\big(f(x)\cdot g(x)\big)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

ד. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad , \quad g(x) \neq 0$

ה. כלל השרשרת: $(f\circ g)' = \big(f(g(x))\big)' = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$

דוגמאות:

1. $\left(2e^x + x^5 + \sqrt{x}\right)' = 2e^x + 5x^4 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

.2 $\left(\ln x + \sin x + \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x} + \cos x - \frac{1}{x^2}$

.3 $(\cos x^2)' == (-\sin x^2)\cdot 2x = -2x\cdot \sin x^2$

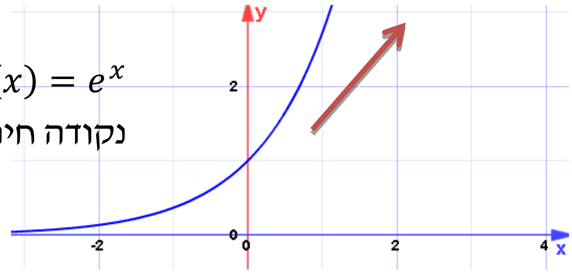
.4 $\left(\ln(3x^4+1) - e^{5x^2} - \frac{3x}{1+x^2}\right)' = \frac{12x^3}{3x^4+1} - 10xe^{5x^2} - \frac{3(1+x^2)-6x^2}{(1+x^2)^2}$

.5
$$\left((\sin(\ln x^2))\cdot\left(2^x - \frac{1}{x^2}\right)\right)'$$
$$= \left(\cos(\ln x^2)\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x\right)\cdot\left(2^x - \frac{1}{x^2}\right) + (\sin(\ln x^2))\cdot\left(2^x\ln 2 + \frac{2}{x^3}\right)$$
$$= \frac{2\cos(\ln x^2)}{x}\cdot\left(2^x - \frac{1}{x^2}\right) + (\sin(\ln x^2))\cdot\left(2^x\ln 2 + \frac{2}{x^3}\right)$$

משפט: תהי f פונקציה גזירה בקטע (a,b) , אם $f'(x) > 0$ לכל x בקטע (a,b) אז f עולה ממש בקטע (a,b). ואם $f'(x) < 0$ לכל x בקטע (a,b) אז f יורדת ממש בקטע (a,b) .

דוגמא: $f(x) = e^x$ עולה ממש על כל הציר הממשי, כי לכל x ממשי $f'(x) = e^x > 0$

שיפוע הישר המשיק $f(x) = e^x$ בכל נקודה חיובי, לכן f עולה ממש.



תרגיל: גזור את הפונקציות הבאות:

.1 $f(x) = 2x^5 - 4x^2 + 3$

.2 $f(x) = 7x^7 + 3x^2 - 4x - 1$

.3 $f(x) = \sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{x^2} - 3x^{-3} + 2$

.4 $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2+1}$

.5 $f(x) = x\ln(x+1) - 2x$

.6 $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{2x-1}$

.7 $f(x) = e^{x+3} - 2\sin e^x$

.8 $f(x) = 5\ln(x^2 - \sin x) + e^{\cos x} - \arcsin x + 6^x$

פתרון:

1. $f'(x) = 10x^4 - 8x$
2. $f'(x) = 49x^6 + 6x - 4$
3. $f'(x) = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} - \frac{10}{x^3} + \frac{9}{x^4}$
4. $f'(x) = \frac{(2x-3)(x^2+1) - 2x(x^2-3)}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2+8x-3}{(x^2+1)^2}$
5. $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} - 2$
6. $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$
7. $f'(x) = e^{x+3} - 2e^x \cos e^x$
8. $f'(x) = \frac{10x - 5\cos x}{x^2 - \sin x} - e^{\cos x}\sin x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 6^x \ln 6$

תרגיל: חשב את $f'(3)$ ו- $f'(0)$ של הפונקציה $f(x) = 3x^5 - 2e^{x-1} + \sqrt{x^2+1} - 22$.

פתרון: לפי כללי גזירה:

$$f'(x) = \left(3x^5 - 2e^{x-1} + \sqrt{x^2+1} - 22\right)' = 15x^4 - 2e^{x-1} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

לכן:

$$f'(0) = -\frac{2}{e}$$

$$f'(3) = 15 \cdot 3^4 - 2e^{3-1} + \frac{3}{\sqrt{3^2+1}} = 1215 - 2e^2 + \frac{3}{\sqrt{10}}$$

תרגיל: מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_0 כאשר:

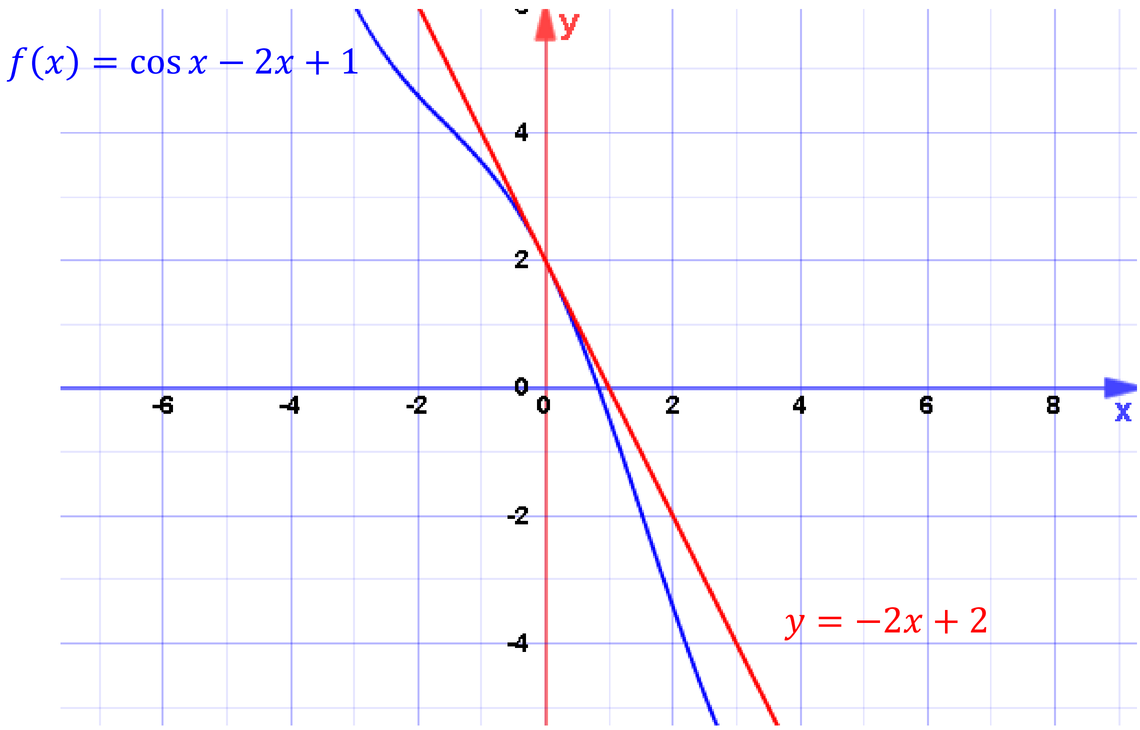
1. $f(x) = x^3 - 2 \quad , \quad x_0 = 2$

$f(x) = \cos x - 2x + 1 \quad , \quad x_0 = 0$ .2

פתרון: משוואת ישר כללית היא $y = ax + b$, כאשר a הוא שיפוע הישר ו- b הוא גובה נקודת החיתוך עם ציר ה-y . ניעזר בזה ששפוע הישר המשיק שווה לנגזרת הפונקציה בנקודת ההשקה, וגם בזה שנקודת ההשקה נמצאת על הישר המשיק, ונחשב את משוואת הישר המשיק בנקודה ושיפוע בשני הסעיפים:

.1 $f(2) = 6 \quad , \quad a = f'(x_0) = f'(2) = (3x^2)_{x=2} = 12$
$a = 12$ ונקודת ההשקה היא $(2,6)$ לכן: $6 = 12 \cdot 2 + b$ כלומר $b = -18$
ומשוואת הישר היא $y = 12x - 18$.

.2 $f(0) = 2 \quad , \quad a = f'(0) = (-\sin x - 2)_{x=0} = -2$
$a = -2$ ונקודת ההשקה היא $(0,2)$ לכן: $b = 2$ ומשוואת הישר היא $y = -2x + 2$.



פרק III:

נושאים נוספים

מספרים מרוכבים

הגדרה: מספר מרוכב z הוא זוג סדור (x, y) של מספרים ממשיים.

הצגה שימושית ונוחה יותר למספר מרוכב היא $z = x + iy$ כאשר $i = \sqrt{-1}$. הצגה זאת נקראת **הצגה אלגברית** של מספר מרוכב.

הגדרה: במספר מרוכב $z = x + iy$ המספר הממשי x נקרא **החלק הממשי** של z ומסמנים: $Re\, z = x$. והמספר הממשי y נקרא **החלק המדומה** של z ומסמנים $Im\, z = y$.[1]

קבוצת המספרים המרוכבים מסומנת ע"י:

$$^{2}\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

פעולות במספרים מרוכבים

יהיו $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ שני מספרים מרוכבים, אזי:

1. שוויון: $z_1 = z_2$ אם"ם $x_1 = x_2$ וגם $y_1 = y_2$.
2. חיבור: $z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$
3. חיסור: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$
4. כפל: $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
5. חילוק: מוגדר כפעולה הפוכה לכפל, דרך פשוטה לבצע חילוק היא להשתמש בעובדה:

$$(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

$$(z_2 \neq 0): \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \left(\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\right) \cdot \overbrace{\left(\frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2}\right)}^{=1}$$

$$= \frac{x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$= \frac{x_1x_2 - y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_1y_2 + x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

הגדרה: אם $z = x + iy$ מספר מרוכב, אז המספר $x - iy$ נקרא הצמוד של z ונסמן: $\bar{z} = x - iy$

---

[1] Re. מהמילה Real (ממשי) ו- Im מהמילה Imaginary (מדומה).

[2] $\mathbb{C}$ מהמלה Complex

הערה: קל לראות ש –

- $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$

תרגיל: הוכח כי : $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$

פתרון:

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i}\right)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - i\frac{y_1x_2 - a_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$
$$= \left(\frac{x_1 - y_1 i}{x_2 - y_2 i}\right) = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$$

תרגיל: כתוב את המספרים המרוכבים הבאים בצורה אלגברית $x + yi$:

1. $(1 - i) \cdot (2 + 3i)$
2. $(1 + i)^2$
3. $\frac{3 + 4i}{1 + i}$
4. $\frac{1 + i}{1 - i}$
5. $3i^3 - 2i + 4i^2$
6. $\frac{6}{i} - \frac{2}{i^5}$
7. $i(5 + 7i)$
8. $2i + (3 - i)^{-1}$
9. $\frac{(7 - i)(2 - 2i)}{-1 - i}$
10. $\frac{(4 + 3i) - (2 - i)}{(1 + i) - 5 - i}$

פתרון:

1. $(1 - i) \cdot (2 + 3i) = 2 + 3i - 2i - 3i^2 = 5 + i$
2. $(1 + i)^2 = 1^2 + i^2 + 2 \cdot 1 \cdot i = 1 - 1 + 2i = 2i$
3. $\frac{3 + 4i}{1 + i} = \frac{3 + 4i}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{3 - 3i + 4i - 4i^2}{1 + 1} = \frac{7 + i}{2} = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}i$
4. $\frac{1 + i}{1 - i} = \frac{1 + i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{(1 + i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i$

5. $3i^3 - 2i + 4i^2 = -3i - 2i - 4 = -4 - 5i$

6. $\frac{6}{i} - \frac{2}{i^5} = -6i + 2i = -4i$

7. $i(5 + 7i) = 5i - 7 = -7 + 5i$

8. $2i + (3 - i)^{-1} = 2i + \frac{1}{3 - i} \cdot \frac{3 + i}{3 + i} = 2i + \frac{3 + i}{10} = \frac{3}{10} + \frac{21i}{10}$

9. $\frac{(7 - i)(2 - 2i)}{-1 - i} = \frac{14 - 14i - 2i - 2}{-1 - i} = \frac{12 - 16i}{-1 - i} \cdot \frac{-1 + i}{-1 + i}$

$$= \frac{-12 + 12i + 16i + 16}{2} = 2 + 14i$$

10. $\frac{(4 + 3i) - (2 - i)}{(1 + i) — 5 - i} = \frac{2 + 4i}{-4} = -\frac{1}{2} - i$

הגדרה: אם $z = x + iy$ אז ערך מוחלט של z הוא $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, מרחק הנקודה (x, y) מהראשית.

תכונות:

- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (אי-שוויון המשולש)
- $\left||z_1| - |z_2|\right| \leq |z_1 - z_2|$

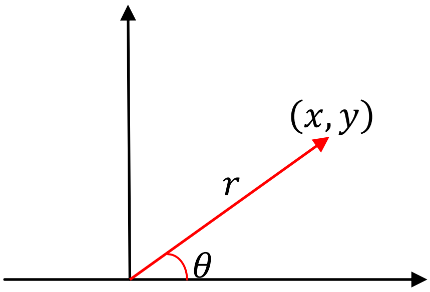
תרגיל: הראה כי אם $|z| = 3$ אז $|z + 6 + 8i| \leq 13$.

פתרון: נשתמש באי-שוויון המשולש ונקבל:

$$|z + 6 + 8i| \leq |\mathrm{z}| + |6 + 8\mathrm{i}| = 3 + \sqrt{6^2 + 8^2} = 3 + 10 = 13$$

הצגה קוטבית של מספרים מרוכבים

כזכור מייצגים מספר מרוכב $z=x+iy$ ע״י הנקודה (x,y) במישור, כלומר ניתן להסתכל אליו כווקטור מהראשית, ולכן ניתן לייצגו ע״י מרחקו מהראשית והזווית שהוא מייצר עם ציר ה- x. נסמן ב- r את מרחק המספר המרוכב מראשית הצירים וב- θ את הזווית עם ציר x. וכעת את הנקודה (x,y) ניתנת להצגה ע״י הקואורדינאטות הקוטביות (r,θ). כלומר:



$$x=r\cos\theta \quad , \quad y=r\sin\theta$$

לכן ההצגה הקוטבית (או הצגה פולארית) של z היא

$$z=r\cos\theta+ir\sin\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

הערה: $r=|z|$ נקרא המודול של z, והזווית θ נקראת ארגומנט של z. מסמנים: $\theta=\arg z$.

נשים לב שהנקודה (x,y) ניתנת להצגה ע״י $(r,\theta+2\pi k)$ עבור k שלם כלשהו.

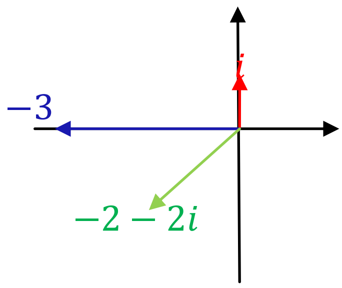
הגדרה: ארגומנט ראשי של z היא זווית הנמצאת בקטע $[0,2\pi)$. מסמנים $\operatorname{Arg} z$.

דוגמא: עבור המספרים $z_1=i\ ,\ z_2=-3\ ,z_3=-2-2i$:

$$\arg z_1=\left\{\cdots,-\frac{3\pi}{2}\ ,\frac{\pi}{2}\ ,\frac{5\pi}{2}\ ,\cdots\right\} \quad , \quad \operatorname{Arg} z_1=\frac{\pi}{2}$$

$$\arg z_2=\{\cdots,-\pi\ ,\pi\ ,3\pi\ ,\cdots\} \quad , \quad \operatorname{Arg} z_2=\pi$$

$$\arg z_3=\left\{\cdots,-\frac{3\pi}{4}\ ,\frac{5\pi}{4}\ ,\frac{13\pi}{4}\ ,\cdots\right\} \quad , \quad \operatorname{Arg} z_3=\frac{5\pi}{4}$$



תרגיל. כתוב $z=\sqrt{3}+i$ בצורה קוטבית.

פתרון. נחשב את r ו- θ :

$$r=|z|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{4}=2 \quad , \quad \theta=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$$

לכן: $z=\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

תרגיל: כתוב $z=-\sqrt{3}-i$ בצורה קוטבית.

פתרון: נחשב את r ו- θ :

$$r = |z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2 \quad , \quad \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

אבל, נשים לב שהנקודה $\left(-\sqrt{3},-1\right)$ נמצאת ברביע השלישי, לכן $\theta = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$
סה"כ: $z = -\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

תרגיל: כתוב את המספרים הבאים בצורה קוטבית:

1. $z = -2 + 2i$
2. $z = 2$
3. $\mathrm{z} = -i$

פתרון: נחשב את r ו- θ :

1.
$$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} \quad , \quad \theta = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{arctg}\frac{2}{-2} = \frac{3\pi}{4}$$
$$\Longrightarrow \qquad z = -2 + 2i = \sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

2.
$$r = |z| = \sqrt{(2)^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2 \quad , \quad \theta = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{arctg}\frac{0}{2} = 0$$
$$\Longrightarrow \qquad z = 2 = 2(\cos 0 + i\sin 0)$$

3.
$$r = |z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1 \quad , \quad \theta = \frac{3\pi}{2}$$
$$\Longrightarrow \qquad z = -i = \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

נוסחת דה-מואבר[1]

יהיו $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \; , \; z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ שני מספרים מרוכבים, אז

[1] דה-מואבר הוא מתמטיקאי צרפתי.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
$$= r_1 \cdot r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1)]$$
$$= \boldsymbol{r_1 \cdot r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))}$$

בפרט (נוסחת דה-מואבר): $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

דוגמא:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{15} = 1^{15}\cdot\left(\cos\left(15\cdot\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(15\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right) = \cos\frac{15\pi}{6}+i\sin\frac{15\pi}{6}$$
$$= \cos\frac{3\pi}{6}+i\sin\frac{3\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

תרגיל: חשב $(1+i)^{20}$

פתרון: נציג את המספר $1+i$ בצורה קוטבית ונשתמש בנוסחת דה-מואבר:

$$(1+i)^{20} = \left(\sqrt{2}\right)^{20}\left(\cos\left(20\cdot\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(20\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= 2^{10}\left(\cos\frac{20\pi}{4}+i\sin\frac{20\pi}{4}\right)$$
$$= 1024(\cos 5\pi + i\sin 5\pi) = -1024$$

שורשים של מספר מרוכב

הגדרה: מספר מרוכב w נקרא השורש ה-n-י של z אם מתקיים $z = w^n$.

חישוב שורשים למספר מרוכב $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ניתן לעשות לפי הנוסחה:

$$\sqrt[n]{z} = w_k = \sqrt[n]{z}\left(\cos\frac{\theta+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right) \quad , \qquad k = 0,1,2,\cdots,n-1$$

דוגמא: נחשב $\sqrt[3]{-8i}$:

נציג בהתחלה מספר זה בצורה קוטבית, $\theta = \frac{3\pi}{2}$, $r = |-8i| = 8$ כלומר:

$$\sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{3}\right) \quad , \qquad k = 0,1,2$$

לכן השורשים הם:

$$w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i$$
$$w_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i$$
$$w_2 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i$$

פתרונות למשוואה ריבועית מעל $\mathbb{C}$

לכל משוואה ריבועית יש פתרונות מעל המרוכבים, נראה דוגמא למשוואה שאינה פתירה מעל הממשיים ונפתור אותה באמצעות נוסחת השורשים מעל המרוכבים:

דוגמא: נפתור את המשוואה $x^2 + 2x + 2 = 0$, נשתמש בנוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\mathrm{i}}{2}$$

כלומר, הפתרונות הם: $x_2 = -1 - i$, $x_1 = -1 + i$. כמו כן מתקיים הפירוק:

$$x^2 + 2x + 2 = \big(x - (-1 + i)\big)\big(x - (-1 - i)\big)$$

תרגיל: מצא את הפתרונות של $z^2 + (1 - i)z - 3i = 0$.

פתרון: נשתמש בנוסחת השורשים:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(1 - i) \pm \sqrt{(1 - i)^2 + 12i}}{2} = \frac{-(1 - i) \pm \sqrt{10i}}{2}$$

לצורך חישוב $\sqrt{10i}$ נעביר את המספר $10i$ לצורה קוטבית: $10i = 10\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ ונקבל:

$$w_0 = \sqrt{10}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{5} + \sqrt{5}i$$
$$w_1 = \sqrt{10}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{10}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{5} - \sqrt{5}i$$

מכאן:

$$z_1 = \frac{1}{2}\left[-1 + i + \left(\sqrt{5} + \sqrt{5}i\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)i$$
$$z_2 = \frac{1}{2}\left[-1 + i + \left(-\sqrt{5} - \sqrt{5}i\right)\right] = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)i$$

תרגילים נוספים:

1. מצא את $Re(z)$, $Im(z)$ כאשר:

א. $z=\left(\frac{i}{2-i}\right)\left(\frac{1}{2+2i}\right)$ ב. $z=\frac{1}{(2-i)^5(3+2i)}$

2. כתוב את המספרים הבאים בצורה קוטבית:

א. $\sqrt{3}-i$ ב. $-\frac{2}{1+\sqrt{3}i}$

3. מצא את הפתרונות של המשוואות הבאות:

א. $z-3\bar{z}+2-4i=0$ ב. $z^2=3z+5$

ג. $z^2+2z+5=0$ ד. $4z^2+9=0$

ה. $i(2z-1)=2z\bar{z}$ ו. $z^2+(1-i)z-3i=0$

4. הוכח או הפרך:

א. אם $z=\bar{z}$ אז $z^2=\overline{z^2}$

ב. אם $z\cdot\bar{z}=0$ אז $\bar{z}=0$

ג. $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=2Im(z_1\overline{z_2})$, $z_1,z_2\in\mathbb{C}$

ד. אם $|z|=1$ אז $1\le|z^2-3|\le4$.

5. לכל n טבעי i^n יכול להיות אחד מארבעת המספרים $1,-1,i,-i$
מצא עבור אילו ערכים של n מתקיים:

א. $i^n=1$ ב. $i^n=-1$ ג. $i^n=i$ ד. $i^n=-i$

6. יהי z מספר מרוכב השונה מאפס , הוכח:
$Re\left(\frac{1}{z}\right)>0$ אם"ם $Re(z)>0$

7. הוכח שאם z_0 הוא פתרון למשוואה:
$a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0$ כאשר $a_i\in\mathbb{R}$, $0\le i\le n$ אזי גם $\overline{z_0}$ הוא פתרון.

8. חשב:

א. $\left(-\sqrt{2}+\sqrt{6}i\right)^{14}$ ב. $\sqrt[3]{1}$ (השורשים מסדר 3 של 1)

ג. $(5+12i)^{1/2}$ ד. $(-i)^{1/3}$ (השורשים מסדר 3 של $-i$)

קומבינטוריקה

עקרון הכפל

באמצעות עקרון הכפל ניתן לדעת את מספר ההתאמות השונות בין איברי שתי קבוצות.

דוגמא. תהי $A=\{a,b,c\}$ ו- $X=\{1,2,3,4,5\}$.

1. כמה פונקציות $f: A \to X$ קיימות ?
2. כמה פונקציות $f: A \to X$ הן על ?
3. כמה פונקציות $h: X \to X$ הן חח״ע ועל ?

פתרון:

1. 5^3 , לכל איבר ב- A יש 5 אפשריות לבחירת תמונה מ- X .
2. בקבוצה A יש 3 איברים , לכן המקסימום איברים בתמונה יהיה 3 , כלומר לא נצליח אף פעם להגדיר מקור לכל איבר ב- X. לכן לא קיימת פונקציה על מ- A ל- X .
3. $5!$, שכן כאשר X קבוצה סופית אז פונקציה מ-X-ל- X היא חח״ע אס״ם היא על. לכן מספר הפונקציות שהן חח״ע שווה למספר הפונקציות שהן חח״ע ועל.

תרגיל: בכמה אופנים שונים ניתן לסדר 6 תלמידים בשורה.

פתרון. $6!$, למקום הראשון בשורה שמתחילים בו יש 6 אפשריות לשני 5 וכו׳ .(במצב זה אומרים אין חזרות, כי כל תלמיד יכול לעמוד רק במקום אחד)

תרגיל: בכמה אופנים שונים ניתן לסדר 3 בנים ו- 2 בנות כך ש-

1. אין הגבלה על אופן הסדר.
2. כל הבנים עומדים זה לצד זה.
3. כל הבנים צמודים זה לזה והבנות עם כן זו לצד זו.

פתרון:

1. $5!$, כמספר האפשריות לסדר 5 איברים שונים בשורה.
2. $3!\cdot 3!$, מתיחסים לרצף הבנים כאילו איבר אחד ועוד שתי בנות ולכן בסה״כ קיימים 3 איברים, $3!$ הוא מספר האפשריות לסדר 3 איברים שונים בשורה, אך יש גם להתחשב בסדר הפנימי של 3 הבנים, שזה שווה ל- $3!$. ולכן בסה״כ קיימים: $3!\cdot 3!$ אופנים.
3. $2!\cdot 3!\cdot 2!$, מספר האפשריות לסדר שני איברים שונים (רצף הבנים ורצף הבנות) כפול הסדר הפנימי לכל רצף.

תרגיל: בכמה מספרים טבעיים יש 5 ספרות בדיוק ? כמה מהם זוגי ? וכמה מהם מתחלק ב- 5 ?

פתרון: $9\cdot 10^4$ מספרים טבעיים עם 5 ספרות בדיוק, 9 אופציות לספרה השמאלית ביותר (אפס לא נכלל) , ולשאר הספרות יש 10 אופציות.

$5\cdot 9\cdot 10^3$ מהם זוגיים, הספרה הימנית יש לה 5 אופציות : $0,2,4,6,8$.

$2\cdot 9\cdot 10^3$ מתחלקים ב- 5, לספרה ימנית שתי אופציות 0 או 5 .

הערה: לסדר איברים שונים במעגל, אין חשיבות לבחירת המקום הראשונה. על כן מספר האפשריות לסדר n איברים שונים במעגל הוא : $(n-1)!$.

דוגמא: בכמה אופנים ניתן לסדר 20 ילדים בצורה מעגלית.

פתרון: $(20-1)!=19!$, סדר האיברים במעגל נקבע לאחר הבחירה הראשונה ע״י מרחק כל ילד שנבחר מהילד בבחירה הראשונה.

תרגיל: בכמה אופנים ניתן להושיב 5 ילדים על קרוסלה שעליה 5 סוסים ?

פתרון.$(5-1)!=4!$

הערה: סידור איברים זהים לא מגדיל מספר אפשריות הסדר. על כן מספר האפשריות לסדר n איברים כאשר מתוכם n_1 איברים זהים מסוג ראשון, ו n_2 איברים זהים מסוג שני,...,ו n_k איברים זהים מסוג K שווה ל- :

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$$

כאשר : $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$.

דוגמא: בכמה אופנים ניתן לסדר על המדף 3 ספרים זהים באלגברה, 2 ספרים זהים בחדו״א, 4 ספרים זהים במתמטיקה דיסקרטית?

פתרון: $\frac{(3+4+2)!}{2!\cdot 3!\cdot 4!}$, אחרי שמסדרים $3+4+2=9$ ספרים ב- $9!$ אופנים, נחלק בסידור הפנימי של ספרי החדו״א, ספרי האלגברה וספרי הדיסקרטית, כי לא צריך להתייחס לסידור הפנימי של כל קבוצת ספרים זהים.

תרגיל: כמה מספרים בלעי 5 ספרות מורכבים מהמספרים$1,2,2,3,3$.

פתרון: $\frac{5!}{1!\cdot 2!\cdot 2!}$

תרגיל: כמה מילים בנות 11 אותיות ניתן ליצור מהאותיות $BABABABADAC$ כאשר:

1. אין הגבלה.
2. האות C חייבת להיות בסוף המילה.
3. אות A חייבת להיות בתחילת המילה.
4. 5 האותיות A חייבות להיות זו לצד זו.

פתרון.

1. $\frac{11!}{4!\cdot5!}$, מספר האפשריות לסדר 11 אותיות שונות חלקי הסידור הפנימי של האות A והיסדור הפנימי של האות B.
2. $\frac{10!}{4!\cdot5!}$, נקבע את האות C בסוף המילה ונספור את האפשריות לסדר 10 אותיות חלקי הסידור הפנימי של A ושל B.
3. $\frac{10!}{4!\cdot4!}$, נשים A בתחילת המילה. כעת יש לנו 10 אותיות לסדר בשורה ולחלק בסידור הפנימי של 4 ה-A–ים ו- 4 ה-B–ים.
4. $\frac{7!}{4!}$, נתיחס ל-A-ים כאילו איבר אחד. כעת יש לנו 7 איברים לסדר בשורה ולחלק בסידור הפנימי של ה-B–ים.

בחירת k איברים מתוך קבוצה בת n איברים

נדון בארבעה מצבים: חליפות ללא חזרה, חליפות עם חזרה, צירופים ללא חזרה וצירופים עם חזרה.

חליפות ללא חזרה

כמות האפשריות לבחירת k איברים מתוך קבוצה בת n איברים שונים עם חשיבות לסדר הבחירה, והבחירה היא ללא חזרה:

$$\frac{n!}{(n-k)!} \quad , \quad 0 \le k \le n$$

דוגמא: תהי $A=\{a,b,c\}$ ו- $X=\{1,2,3,4,5\}$. כמה פונקציות $f: A \to X$ חח״ע קיימות.

פתרון: לאיבר הראשון יש 5 אפשריות לבחירת תמונה, לשני 4 כי את התמונה של הראשון לא בוחרים (אין חזרות), ולשלישי 3 אפשריות , סה״כ $\frac{5!}{2!} = 5\cdot4\cdot3$.

תרגיל:. כמה אפשריות יש לסדר 10 כדורים שונים ב-13 תאים, כך שבכל תא יהיה לכל היותר כדור אחד.

פתרון: $\frac{13!}{3!}$, לכדור הראשון יש 13 אפשריות, לשני 12 (כי לא בוחרים תא יותר מפעם אחת או במילים אחרות אין חזרות על בחירת התאים) וכו' .

חליפות עם חזרה

כמות האפשריות לבחירת k איברים מתוך קבוצה בת n איברים שונים עם חשיבות לסדר הבחירה, והבחירה היא עם חזרה :

$$n^k \quad , \quad 0 \leq k$$

דוגמא: כמה מספרים בעלי 5 ספרות ניתן ליצור מהספרות $1,2,3$ כאשר מותר לכל ספרה להופיע יותר מפעם אחת (עם חזרות).

פתרון: 5^3 , לכל ספרה יש 3 אפשריות (עקרון הכפל).

תרגיל: כמה אפשריות יש לסדר 10 כדורים שונים ב-13 תאים, כאשר אין הגבלה על מספר הכדורים בתא.

פתרון: 13^{10} , לכל כדור יש 13 אפשריות.

צירופים ללא חזרה

כמות האפשריות לבחירת k איברים מתוך קבוצה בת n איברים שונים ללא חשיבות לסדר הבחירה, והבחירה היא ללא חזרה :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad , \quad 0 \leq k \leq n$$

מסמנים מקרה זה בסימון המקדם הבינומי $\binom{n}{k}$ או בסימון C_n^k .

דוגמא: כמה אפשריות יש לבחירת ועד של 3 אנשים מתוך קבוצה של 10 אנשים.

פתרון: $\binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \cdot 3!}$, מספר האפשריות לבחירת 3 אנשים לפי סדר הוא $\frac{10!}{7!}$ ומחלקים בסידור הפנימי שזה !3 כי לא חשוב סדר הבחירה.

תרגיל: כמה אפשריות יש לסדר 10 כדורים זהים (אין חשיבות לסדר) ב-13 תאים, כאשר יש מקום לכדור אחד בכל תא (אין חזרות).

פתרון. $\binom{13}{10}$, נבחר 10 תאים מתוך 13 ללא חשיבות לסדר כי הכדורים זהים, וללא חזרות כי יש מקום לכדור אחד בכל תא.

צירופים עם חזרה

כמות האפשריות לבחירת k איברים מתוך קבוצה בת n איברים שונים ללא חשיבות לסדר הבחירה, והבחירה היא עם חזרה:

$$\binom{k+n-1}{n-1} = \frac{(k+n-1)!}{k!\cdot(n-1)!} \quad , \quad 0 \le k \le n$$

דוגמא: כמה אפשריות יש לסדר 10 כדורים זהים (אין חשיבות לסדר) ב-13 תאים, כאשר אין הגבלה על מספר הכדורים בכל תא (עם חזרות).

פתרון:

$$\binom{10+13-1}{10} = \binom{10+13-1}{13-1} = \frac{22!}{10!\cdot 12!}$$

כדי להבין יותר פתרון בעיות מצורה זו נתבונן במספר האפשריות למספרים בינאריים[1] המורכבים מ- k אפסים ו- $n-1$ אחדים. מספר הספרות במספרים אלה הוא $k+n-1$.
ואם נקבע מקום האחדים ב- $\binom{k+n-1}{n-1}$ אפשריות אז מקום האפסים נקבע באופן יחיד (במקומות הריקים), או אפשר לקבוע מקום האפסים ב- $\binom{k+n-1}{k}$ אפשריות ומקום האחדים נקבע באפשרות אחת, לכן כמות מספרים בינאריים המורכבים מ- k אפסים ו- $n-1$ אחדים היא

$$\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}$$

כעת נתבונן בבעיית חלוקת k כדורים זהים ל- n תאים ללא הגבלה על מספר הכדורים בכל תא. בעיה זאת היא אנלוגית לבעיית המספרים הבינאריים המורכבים מ- k אפסים ו- $n-1$ אחדים, וזה אם נתייחס ל- k האפסים כאילו כדורים ו- $n-1$ אחדים כאילו המחיצות בין התאים. וזה מסביר למה $n-1$ ולא n , כי ב- $n-1$ מחיצות ניתן לתאר n תאחם:

$$\underbrace{0001001010}_{\text{7 כדורים 4 תאים}}$$

[1]מספרים המיוצגים בבסיס 2 .

כדורים ותאים ובעיות חלוקה אנלוגיות

נראה בשורות הבאות פתרונות לבעיות חלוקה דומות ומבוססות על אותו רעיון כמו לחשב מספר האפשריות לחלוקת מספר כדורים זהים או שונים למספר תאים עם הגבלה או ללא הגבלה.

נתחיל בטבלה המסכמת את מספר האפשריות לחלק k כדורים ל- n תאים במצבים שונים :

	כדורים שונים (יש חשיבות לסדר)	כדורים זהים (אין חשיבות לסדר)
לכל היותר כדור אחד בתא (אין חזרות על אותה בחירה)	$\frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}$	$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$
אין הגבלה על כמות הכדורים בתא (מותר חזרות)	$\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}$	$\binom{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}}=\binom{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}$

תרגיל: בכמה אופנים ניתן לחלק n כדורים זהים ל- k תאים כך ש-

1. בכל תא יהיה לפחות כדור אחד.
2. בתא הראשון לפחות 7 כדורים.

פתרון:

1. אם $n<k$ אז לא ניתן לבצע חלוקה כזאת.
   עבור $k\le n$ מספר האופנים לחלוקה זאת הוא $\binom{n-k+k-1}{k-1}=\binom{n-1}{k-1}$,
   נחלק לכל תא כדור אחד, את $n-k$ הכדורים הנותרים נחלק אותם לתאים ללא הגבלה.
2. אם $n<7$ אז לא ניתן לבצע חלוקה זאת. עבור $n\ge 7$ נחלק לתא הראשון 7 כדורים ואת שאר ה- $n-7$ כדורים נחלק ללא הגבלה, מספר האפשריות לעשות זאת הוא $\binom{n-7+k-1}{k-1}=\binom{n+k-8}{k-1}$.

תרגיל: כמה פתרונות שלמים יש למשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=30$ כאשר:

1. $x_i\ge 0$ לכל $i\in\{1,2,3,4\}$
2. $x_i\ge 3$ לכל $i\in\{1,2,3,4\}$

פתרון:

1. $\binom{30+4-1}{4-1}=\binom{33}{3}$, בעיה זו אנלוגית לבעית 4 תאים ללא הגבלה ו- 30 כדורים זהים.
2. $\binom{21+4-1}{4-1}=\binom{24}{3}$, נחלק 3 כדורים לכל תא, את 21 הכדורים הנותרים נחלק לתאים ללא הגבלה על מספר הכדורים בתא.

תרגיל: בכמה אופנים שונים ניתן לחלק 500 כדורים זהים ל- 5 תאים כך ש-

1. בכל תא לא יהיה יותר מ- 250 כדורים.
2. בכל תא לא יהיה יותר מ- 110 כדורים.

פתרון:

1. מספר האפשריות לחלק 500 כדורים זהים ל- 5 תאים ללא הגבלה הוא $\binom{500+5-1}{5-1}=\binom{504}{4}$ נחסיר מזה את מספר האפשריות שבהן באחד מחמשת התאים יותר מ- 250 כדורים (לא יתכן שביותר מתא אחד יהיו יותר מ- 250 כדורים). סה״כ

$$\binom{504}{4}-\underbrace{5}_{\substack{\text{מספר האפשריות}\\ \text{לבחור את התא}\\ \text{שבו יותר מ}-250}}\cdot\binom{500-251+5-1}{5-1}=\binom{504}{4}-5\cdot\binom{253}{4}$$

2. ברור כי השיטה הקודמת לא עובדת במקרה זה, כי יתכן שביותר מתא אחד יותר מ- 110 כדורים, לכן נסתכל על הבעיה במבט אחר: נניח שבכל תא יש 110 כדורים, סה״כ יהיו 550 בחמשת התאים. בכמה דרכים ניתן להוציא מהתאים 50 כדורים כך שבסה״כ נשאר עם 500. ברור שמספר האפשריות לזה שווה למספר האפשריות לחלוקת 500 כדורים כך שבכל תא לא יהיה יותר מ- 110 כדורים. כלומר

$$\binom{50+5-1}{5-1}=\binom{54}{4}$$

תרגיל: כמה אופנים שונים יש לסדר 20 כדורים, 7 לבנים, 8 שחורים ו- 5 אדומים בשורה.

פתרון: $\frac{20!}{7!\cdot 8!\cdot 5!}$, ניתן לסדר את ה- 20 כדורים בשורה ב- !20 ולחלק בסידור הפנימי לכל קבוצת כדורים זהים.

<u>דרך נוספת</u> לפתרון שאלה זו היא לבחור מ- 20 המקומות בשורה 7 מקומות ללבנים ב- $\binom{20}{7}$ אפשריות, ו- 8 מקומות לשחורים מ- 13 המקומות שנותרו ב- $\binom{13}{8}$, ו- 5 מקומות לאדומים מ- 5 מקומות האחרונים באפשרות אחת $\binom{5}{5}$. סה״כ אפשריות:

$$\binom{20}{7}\cdot\binom{13}{8}\cdot\binom{5}{5}=\frac{20!}{7!\cdot 8!\cdot 5!}$$

תרגיל: מה מספר התוצאות השונות של הטלת n קוביות זהות (כל קובייה בעלת 6 פאות ממוספרות מ- 1 עד 6).

פתרון: $\binom{n+6-1}{6-1}$, כמספר האפשריות לחלוקת n כדורים זהים ל- 6 תאים ללא הגבלה.

תרגיל: כמה אפשריות יש לקבל 1 בדיוק פעמיים מהטלת קובייה 6 פעמים.

פתרון: $\binom{6}{2}\cdot 5^4$, נבחר שני מקומות לשני האחדים ב- $\binom{6}{2}$ אפשריות, ו- 5 אפשריות לכל מקום מארבעת המקומות שנותרו, שכן אחד לא נכלל.

תרגיל: כמה מספרים בין 1 ל- 9999 יש להם סכום ספרות השווה ל- 8 .

פתרון: $\binom{8+4-1}{4-1}=\binom{11}{3}$, כמות המספרים המקיימת את זה היא שווה למספר הפתרונות למשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=8$ כאשר $0\le x_i\le 9$ לכל $1\le i\le 4$ וזהו מספר האופנים לחלק 8 כדורים זהים ל- 4 תאים ללא הגבלה.

תרגיל: בכיתה של 25 סטודנטים רוצים לבחור ועד כיתה, בועד יהיו יו״ר, דובר ועוזר. בכמה אופנים ניתן לבחור כזב ועד אם:

1. אין הגבלה.
2. תלמיד אחד מסוים חייב להיבחר כיו״ר.
3. שני תלמידים מסוימים לא רוצים להיבחר כדובר הועד.

פתרון:

1. $\frac{25!}{22!}$, לבחירת יו״ר יש 25 אפשריות, לדובר 24 ולעוזר 23 אפשריות.
2. $\frac{24!}{22!}$, קיימות 24 אפשריות לבחירת דובר ו- 23 אפשריות לעוזר.
3. $\frac{24!}{22!}\cdot 23$, קיימות 23 אפשריות לבחור את הדובר, אח״כ נבחר 2 מתוך 24.

תרגיל: כמה אפשרויות יש לחלוקת 20 קבוצות כדורגל שונות ל- 5 בתים שווים בגודלם.

פתרון: $\binom{4}{4}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{12}{4}\cdot\binom{16}{4}\cdot\binom{20}{4}$, קיימות $\binom{20}{4}$ אפשריות לבחירת 4 קבוצות לבית הראשון, ו- $\binom{16}{4}$ אפשריות לבחור 4 קבוצות לבית השני וכו'.

עקרון הסכום

אם $A_1\,,A_2\,,\cdots,A_n$ קבוצות זרות, אז מספר האיברים באיחוד שלהן $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ שווה לסכום האיברים של כל קבוצה. על בסיס זה אנחנו נדון בבעיות קומבינטורית שניתן להפריד אותן למקרים זרים.

דוגמא: כמה אפשריות ישנן לבחירת 5 אנשים מתוך קבוצה של 25 כאשר דני ויוסי דורשים שאם אחד מהם נבחר לקבוצה אז גם השני נבחר.

פתרון. נפריד למקרים:

מקרה ראשון: דני ויוסי נבחרים לקבוצה, ומתוך ה- 23 הנותרים נבחר 3 אנשים. כלומר יש $\binom{23}{3}$ אפשריות במקרה זה.

מקרה שני: דני ויוסי לא נבחרים לקבוצה, כלומר נבחר 5 אנשים מתוך 25 . כלומר יש $\binom{23}{5}$ אפשריות במקרה זה.

שני המקרים זרים, לכן נשתמש בעקרון הסכום ונקבל שמספר האפשריות לבחירה הרצויה הוא $\binom{23}{5}+\binom{23}{3}$.

תרגיל: כמה אפשריות ישנן לבחירת 5 אנשים מתוך קבוצה של 25 כאשר שרה ופאטמה לא מוכנות להיות ביחד בקבוצה.

פתרון: נפריד למקרים:

מקרה ראשון: פאטמה נבחרה לקבוצה ושרה לא. מספר האפשריות למקרה זה הוא $\binom{23}{4}$

מקרה שני: שרה נבחרה לקבוצה ופאטמה לא. מספר האפשריות למקרה זה הוא $\binom{23}{4}$

מקרה שלישי: פאטמה ושרה לא נבחרו לקבוצה. מספר האפשריות למקרה זה הוא $\binom{23}{5}$

שלושת המקרים זרים, לכן התשובה היא:

$$\binom{23}{4}+\binom{23}{4}+\binom{23}{5}$$

<u>פתרון נוסף</u>: מספר האפשריות לבחירת 5 אנשים מתוך קבוצה של 25 ללא הגבלה הוא $\binom{25}{5}$, נחסיר מזה מספר האפשריות לבחירת קבוצה המכילה את פאטמה ושרה: $\binom{23}{3}$.
כלומר התשובה היא:

$$\binom{25}{5}-\binom{23}{3}$$

תרגיל: בכיתה יש 30 תלמידים, מתוכם 13 בנות. כמה אפשריות שונות ישנן לבחירת קבוצה של שלושה שבה לפחות בן אחד.

פתרון: נפריד למקרים:

קבוצות שבהן יש בן אחד ושתי בנות.

קבוצות שבהן יש שני בנים ובת.

קבוצות של שלושה בנים.

המקרים זרים, לכן סה"כ אפשריות יש $\binom{17}{3}+\binom{13}{1}\cdot\binom{17}{2}+\binom{13}{2}\cdot\binom{17}{1}$

<u>פתרון נוסף</u>: נוריד ממספר האפשריות לבחירת קבוצה ללא הגבלה את מספר הקבוצות שבהן שלוש בנות, כלומר $\binom{13}{3}-\binom{30}{3}$.

תרגיל: תן הסבר קומבינטורי לזהות:

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$$

פתרון: שני הביטויים מבטאים את מספר האפשריות לבחירת קבוצה של k איברים מתוך n איברים. מצד זה שווה ל- $\binom{n}{k}$, ומצד שני ניתן למנות אותן חלוקות ע"י זה שאיבר מסוים x חייב להיות בקבוצה ומספר האפשריות לזה הוא $\binom{n-1}{k-1}$ או אותו איבר x לא נבחר לקבוצה, כלומר $\binom{n-1}{k}$. שני המקרים זרים לכן סה"כ אפשריות: $\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$.

תרגיל: תן הסבר קומבינטורי לזהות:

$$\binom{n+m}{k}=\sum_{i=0}^{\mathrm{k}}\binom{n}{i}\cdot\binom{m}{k-i}$$

פתרון:

שני הביטויים בשוויון מבטאים אותו מספר אפשריות לבחירת קבוצת k אנשים מתוך שתי קבוצות, הראשונה בה m גברים והשנייה קבוצת n נשים. הצד השמאלי בשוויון הוא מספר האפשריות לבחירה זו אם נתייחס לשתי הקבוצות כאילו קבוצה אחת של $n+m$ אנשים ומתוכה בוחרים k אנשים. הצד הימני זה אותו מספר אפשריות רק בדרך שונה, נפריד את בחירת k האנשים למקרים: נבחר k נשים ואפס גברים או $k-1$ נשים וגבר אחד, או $k-2$ נשים ושני גברים וכו'. המקרים זרים, לכן סה"כ אפשריות:

$$\underbrace{\binom{n}{k}\cdot\binom{m}{0}}_{k\text{ נשים, }0\text{ גברים}}+\underbrace{\binom{n}{k-1}\cdot\binom{m}{1}}_{k-1\text{ נשים, }1\text{ גברים}}+\underbrace{\binom{n}{k-2}\cdot\binom{m}{2}}_{k-2\text{ נשים, }2\text{ גברים}}+\cdots+\underbrace{\binom{n}{0}\cdot\binom{m}{k}}_{0\text{ נשים, }k\text{ גברים}}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\cdot\binom{n}{k-i}$$

מולטינום

ראינו נוסחה עבור שני משתנים (הבינום של ניוטון):

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}$$

וכרגע אנחנו רוצים להגדיר נוסחה עבור k משתנים, כלומר מה הפיתוח של:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$$

איבר כללי בפיתוח נוסחה כללית זאת (נוסחה זאת נקראת מולטינום) הוא מהצורה:

$$x_1^{n_1}\cdot x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$$

המקדם של איבר כללי שווה למספר האפשריות לחלוקת n כדורים שונים ל- k תאים כך שבתא ה- i יהיו בדיוק n_i כדורים. כלומר:

$$\binom{n}{n_1}\cdot\binom{n-n_1}{n_2}\cdot\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k}=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$$

מסמנים מקדם זה ב- $\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_k}$

נשים לב ש- $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$ ולכל i מתקיים $n_i\geq 0$. לכן נוסחת המולטינום היא:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n=\sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_k=n\\ n_i\geq 0}}\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_k}x_1^{n_1}\cdot x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$$

דוגמא: עבור $k=3$ ו- $n=3$:

$$(x_1+x_2+x_3)^3=\sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=3\\ n_i\geq 0}}\frac{3!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}$$

$$=\frac{3!}{0!\,0!\,3!}x_1^0x_2^0x_3^3+\frac{3!}{0!\,1!\,2!}x_1^0x_2^1x_3^2+\frac{3!}{0!\,2!\,1!}x_1^0x_2^2x_3^1+\cdots+\frac{3!}{3!\,0!\,0!}x_1^3x_2^0x_3^0$$

$$=x_3^3+3x_2x_3^2+3x_2^2x_3+\cdots+x_1^3$$

דוגמא:

בעיית חלוקת 20 קבוצות כדורגל שונות ל- 5 בתים שווים בגודלם שראינו, ניתן לפתור אותה באמצעות המולטינום, כלומר בעיה זאת שקולה לשאלה, מהו מקדם $x_1^4x_2^4x_3^4x_4^4x_5^4$ בפיתוח המולטינום $(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^{20}$. והתשובה כמו שראינו היא :

$$\binom{20}{4,4,4,4,4}=\binom{20}{4}\cdot\binom{16}{4}\cdot\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4}$$

תרגיל: מהו המקדם של האיבר $x_1^2x_2^3x_3^2$ בפיתוח $(x_1+x_2+x_3)^7$.

פתרון: נציב בנוסחת המולטינום $n_1=2\,,n_2=3\,,n_3=2$ ונקבל כי האיבר המתאים הוא

$$\binom{7}{2,3,2}=\frac{7!}{2!\,3!\,2!}$$

תרגיל: מהו סכום המקדמים בפיתוח $(x_1+x_2+x_3+x_4)^{13}$:

פתרון: נציב $x_1=x_2=x_3=x_4=1$ בנוסחת המולטינום ונקבל כי

$$(1+1+1+1)^{13}=\sum_{\substack{\sum_{i=1}^4 n_i=13\\ n_i\geq 0}}\binom{13}{n_1,n_2,n_3,n_4}1^{n_1}\cdot 1^{n_2}\cdot 1^{n_3}\cdot 1^{n_4}$$

כלומר סכום המקדמים הוא

$$\sum_{\substack{\sum_{i=1}^4 n_i=13\\ n_i\geq 0}}\binom{13}{n_1,n_2,n_3,n_4}=4^{13}$$

הערה: ניתן להוכיח באופן דומה לתרגיל קודם שסכום המקדמים בפירוק מולטינומי כללי שווה ל- k^n .

תרגיל: תן הסבר קומבינטורי לשוויון:

$$\binom{n}{n_1,n_2,n_3}=\binom{n-1}{n_1-1,n_2,n_3}+\binom{n-1}{n_1,n_2-1,n_3}+\binom{n-1}{n_1,n_2,n_3-1}$$

פתרון:

צד שמאל של המשוואה שווה למקדם המולטינומי השווה גם הוא למספר האפשריות לחלוקת n כדורים שונים $(n_1+n_2+n_3=n)$ ל- 3 תאים כך שבתא ה- i יהיו n_i כדורים.

צד ימין של המשוואה הוא אותו פתרון לאותה בעיית חלוקה, וזה אם נבחר כדור x מסוים להיות בקבוצה הראשונה, ואו״כ נבחר אותו כדור x להיות בקבוצה השנייה ואו״כ נבחר את x להיות בקבוצה השלישית, האפשריות בשלושת המקרים זרות לכן לפי עקרון הסכום מספר האפשריות שווה לסכום של האפשריות בשלושת המקרים, כלומר:

$$\binom{n}{n_1,n_2,n_3}=\underbrace{\binom{n-1}{n_1-1,n_2,n_3}}_{\substack{\text{מספר אפשריות}\\\text{לחלוקה כאשר}\\ x\text{ בתא הראשון}}}+\underbrace{\binom{n-1}{n_1,n_2-1,n_3}}_{\substack{\text{מספר אפשריות}\\\text{לחלוקה כאשר}\\ x\text{ בתא השני}}}+\underbrace{\binom{n-1}{n_1,n_2,n_3-1}}_{\substack{\text{מספר אפשריות}\\\text{לחלוקה כאשר}\\ x\text{ בתא השלישי}}}$$

עקרון שובך היונים

בחלוקת $n+1$ יונים ל- n שובכים, קיים בהכרח שובך שיש בו לפחות 2 יונים. באופן כללי יותר, אם מחלקים $k\cdot n+1$ יונים ל- n שובכים אז קיים שובך שיש בו לפחות $k+1$ יונים.

דוגמא: במסיבה משתתפים 20 זוגות נשואים, כמה אנשים לפחות צריך לבחור כך שבוודאות יבחרו שני בני זוג.

פתרון: 21 , לפי עקרון שובך היונים.

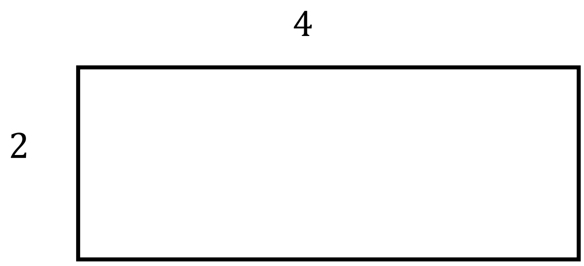
תרגיל: הוכח שבכל $n+1$ מספרים טבעיים שונים ניתן למצוא שני מספרים שהפרשם מתחלק ב- n

פתרון:

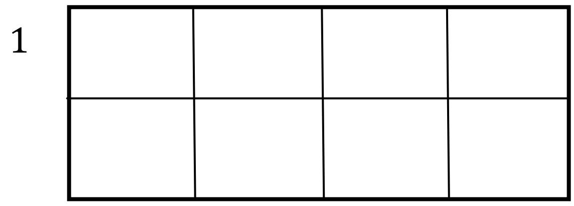
נסתכל על $n+1$ המספרים כאילו היונים, והשובכים הם שאריות חלוקה ב- n $(0,1,\cdots,n)$. אם נחלק את ה- n מספרים (יונים) ל- n שובכים, אז לפי עקרון שובך היונים קיימים לפחות שני מספרים שיש להם אותה שארית חלוקה ב- n , לכן הפרשם מתחלק ב- n.

ניקח לדוגמא את שני המספרים 6 ו- 21 , שניהם מתחלקים ב- 5 עם שארית 1 , לכן הפרשם מתחלק ב- 5 (ללא שארית).

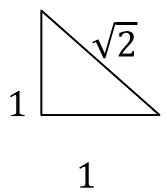
תרגיל: הוכח שבין כל 9 נקודות על המלבן יש לפחות שתי נקודות שהמרחק בניהם $\leq \sqrt{2}$.



פתרון: נחלק את המלבן לריבועים באורך 1 לכל צלע:



אם נחלק את 9 הנקודות (יונים) ל- 8 הריבועים (שובכים) אז בהכרח נקבל שתי נקודות באותו ריבוע, והמרחק המקסימלי בין שתי נקודות על ריבוע כזה הוא $\sqrt{2}$ (היתר במשולש ישר זווית)



עקרון ההכלה וההדחה

עקרון זה מראה את הקשר בין עקרון הכפל ועקרון הסכום, כמו שראינו, אם A_1 היא קבוצת אפשריות למקרה מסויים בתנאים מסויימים ו- A_2 היא קבוצת אפשריות לאותו מקרה בתנאים אחרים, אז קבוצת האפשריות תחת אותם תנאים של A_1 **וגם** של A_2 היא $A_1 \cap A_2$, וקבוצת האפשריות תחת התנאים של A_1 **או** של A_2 היא $A_1 \cup A_2$.

אם נסמן ב- $|A|$ את מספר האיברים בקבוצה A כלשהי, אז במקרה זה הקשר בין מספר האיברים בשתי הקבוצות (קבוצת האיחוד וקבוצת החיתוך) הוא:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

זה מכיוון שהאיברים בחיתוך נספרים פעמיים, פעם ב-A_1 ופעם נוספת ב- A_2 . מאותם שיקולים המצב עם 3 קבוצות הוא:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| \\ = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \\ + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

ובאופן כללי: יהיו $A_1, A_2, \cdots, A_n$ קבוצות כלשהן, אז:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$

דוגמא: מהו מספר הטבעיים בין 1 ל- 1000 (כולל) המתחלקים ב- 5 או 6 או 7 .

פתרון: נסמן ב- A_1, A_2, A_3 את קבוצת הטבעיים בין 1 ל- 1000 המתחלקים ב- $5, 6, 7$ בהתאמה.
נחשב את מספר האיברים בכל קבוצה:

$$|A_1| = \left\lfloor\frac{1000}{5}\right\rfloor = 200 \ , \qquad |A_2| = \left\lfloor\frac{1000}{6}\right\rfloor = 166 \ , \qquad |A_3| = \left\lfloor\frac{1000}{7}\right\rfloor = 142$$

נחשב כעת את מספר האיברים בקבוצות החיתוכים:

$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor\frac{1000}{5\cdot 6}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{1000}{30}\right\rfloor = 33$$

$$|A_1 \cap A_3| = \left\lfloor\frac{1000}{5\cdot 7}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{1000}{35}\right\rfloor = 28$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor\frac{1000}{6\cdot 7}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{1000}{42}\right\rfloor = 23$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor\frac{1000}{5\cdot 6\cdot 7}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{1000}{210}\right\rfloor = 4$$

כעת, נשתמש בעקרון ההכלה וההדחה ונחשב את כמות הטבעיים המתחלקים ב- 5 או 6 או 7 , כלומר נחש את גודל הקבוצה $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$= 200 + 166 + 142 - 33 - 28 - 23 + 4 = 428$$

הערה: ניתן לחשב את גודל קבוצת החיתוך באמצעות עקרון ההכלה וההדחה, בדוגמא קודמת היה יותר קל לחשב את גודל קבוצת החיתוך בזה לחלק בכפל של 5,6,7 . במקרים מסויימים יהיה מומלץ להשתמש בעקרון ההכלה וההדחה בנוסח קצת שונה על מנת לחשב את גודל קבוצת החיתוך. נראה נוסח זה:

עקרון ההכלה וההדחה (נוסח ב')

הגדרה: תהי U קבוצת כל האפשריות למקרה מסויים, ותהי A קבוצת האפשריות לאותו מקרה בתנאים מסויימים, המשלים של A הוא קבוצת כל האפשריות ב- U שאיננן ב- A . ומסמנים $\bar{A}$.

דוגמא: אם U היא קבוצת כל הטבעיים בין 1 ל- 1000 ו- A היא קבוצת כל הזוגיים ב- U אז $\bar{A}$ (המשלים של A) היא קבוצת כל האי-זוגיים ב- U.

עקרון ההכלה וההדחה

תהי U קבוצת כל האפשריות למקרה מסויים, ו- $A_1, A_2, \cdots, A_n$ תתי קבוצות של U . אז גודל קבוצת חיתוך המשלימים $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$ הוא:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right| = |U| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| - \cdots + (-1)^n \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$

דוגמא: מהו מספר הטבעיים בין 1 ל- 1000 (כולל) שאינם מתחלקים ב- 5 או 6 או 7 .

פתרון:

ברור מפתרון דוגמא קודמת שכמות הטבעיים במקרה זה שווה לסה"כ טבעיים בין 1 ל- 1000 פחות כמות הטבעיים המתחלקים ב- 5 או 6 או 7 כלומר: $1000 - 428 = 572$.
אבל נפתור שאלה זאת באמצעות עקרון ההכלה וההדחה, בהנחה שלא מצאנו את כמות הטבעיים המתחלקים ב- 5 או 6 או 7 :

נסמן את קבוצת כל האפשריות ב- U, לכן $|U| = 1000$. נסמן ב- A_1, A_2, A_3 את קבוצת הטבעיים בין 1 ל- 1000 המתחלקים ב- $5, 6, 7$ בהתאמה, וכמו שראינו:

$$|A_1| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200 \ , \qquad |A_2| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166 \ , \qquad |A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142$$

$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{1000}{5 \cdot 6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor = 33$$

$$|A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{5 \cdot 7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{35} \right\rfloor = 28$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{6 \cdot 7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{42} \right\rfloor = 23$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{5 \cdot 6 \cdot 7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{210} \right\rfloor = 4$$

אנו מחפשים $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|$, לכן לפי עקרון ההכלה וההדחה :

$$\begin{aligned} &|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| \\ &= |U| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\ &-|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1000 - (200 + 166 + 142) + (33 + 28 + 23) - 4 = 572 \end{aligned}$$

תרגיל : מהו מספר הטבעיים בני n ספרות שאפשר להרכיב מ- $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ אם 1,2,3 ו-4 חייבים להופיע.

פתרון:

נסמן ב- U את קבוצת כל הטבעיים בני n ספרות המורכבים מ- $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. אם A_i היא קבוצת הטבעיים ב- U שבהם $1 \le i \le 4$ אינו מופיע, אז :

$$\begin{gathered} |U| = 7^n \quad , \quad |A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 6^n \quad , \\ |A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_1 \cap A_4| = \cdots = |A_3 \cap A_4| = 5^n \\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 4^n \\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 3^n \end{gathered}$$

נשתמש בעקרון ההכלה וההדחה לחשב את $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}|$:

$$\begin{aligned} &|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| \\ &= |U| - (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|) + \cdots + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &= 7^n - \binom{4}{1} \cdot 6^n + \binom{4}{2} \cdot 5^n - \binom{4}{3} \cdot 4^n + 3^n \\ &= 7^n - 4 \cdot 6^n + 6 \cdot 5^n - 4 \cdot 4^n + 3^n \end{aligned}$$

תרגיל : כמה פתרונות במספרים טבעיים יש למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ בתנאי ש-
$x_1 \le 5 \ , \ x_2 \le 4 \ , \ x_3 \ge 2$.

פתרון:

בעיה זאת שקולה לבעיית חלוקת כדורים זהים לתאים, להיפטר מהתנאי $x_3 \ge 2$ נחלק 2 כדורים בתא השלישי ונעבור לשאלה בכמה אופנים ניתן לחלק 13 כדורים זהים ל-4 תאים כך שבתא הראשון לא יהיה יותר מ-5 כדורים ובתא השני לא יהיה יותר מ- 4 כדורים.
נפתור בעיה זאת באמצעות עקרון ההכלה וההדחה, נסמן ב-

U את קבוצת כל האפשריות ללא הגבלה.

A_1 את קבוצת כל האפשריות עם יותר מ- 5 כדורים בתא הראשון.

A_2 את קבוצת כל האפשריות עם יותר מ- 4 כדורים בתא השני.

נחשב את גודל הקבוצות הנ"ל וגודל קבוצות החיתוכים :

$$|U| = \binom{13+4-1}{4-1} \ , |A_1| = \binom{7+4-1}{4-1} \ , |A_2| = \binom{8+4-1}{4-1} \ ,$$
$$|A_1 \cap A_2| = \binom{2+4-1}{4-1}$$

נעבור כעת לחשב את גודל הקבוצה $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |U| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| = \binom{16}{3} - \binom{10}{3} - \binom{11}{3} + \binom{5}{3} = 285$$

תרגיל: כמה פתרונות במספרים שלמים יש למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ בתנאי ש- $-1 \le x_1 \le 1 \ , \ -2 \le x_2 \le 2 \ , \ -3 \le x_3 \le 3 \ , \ -4 \le x_4 \le 4$.

פתרון: נגדיר משתנים חדשים :

$$y_1 = x_1 + 1 \ , \ y_2 = x_2 + 2 \ , \ y_3 = x_3 + 3 \ , \ y_4 = x_4 + 4$$

נציב את המשתנים החדשים במשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ ונקבל $y_1 - 1 + y_2 - 2 + y_3 - 3 + y_4 - 4 = 0$ או בצורה אחרת $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 10$ כאשר

$$0 \le y_1 \le 2 \ , \ 0 \le y_2 \le 4 \ , \ 0 \le y_3 \le 6 \ , \ 0 \le y_4 \le 8$$

לכן קבלנו בעיה שקולה לבעיה מקורית שכן היא גם שקולה לבעיית חלוקת 10 כדורים זהים ל- 4 תאים כך שבתא הראשון לא יהיה יותר מ- 2 כדורים ובתא השני לא יהיה יותר מ- 4 כדורים וכו'.

נפתור בעיה זאת באמצעות עקרון ההכלה וההדחה, נסמן ב-

U את קבוצת כל האפשריות לחלוקה ללא הגבלה.

A_1 את קבוצת האפשריות לחלוקה כאשר בתא הראשון יש יותר מ- 2 כדורים.

A_2 את קבוצת האפשריות לחלוקה כאשר בתא השנייש יותר מ- 4 כדורים.

A_3 את קבוצת האפשריות לחלוקה כאשר בתא השלישי יש יותר מ- 6 כדורים.

A_4 את קבוצת האפשריות לחלוקה כאשר בתא הרביעי יש יותר מ- 8 כדורים.

נחשב את גודל הקבוצות הנ"ל וגודל קבוצות החיתוכים:

$$|U| = \binom{10+4-1}{4-1}\ , |A_1| = \binom{7+4-1}{4-1}\ , |A_2| = \binom{5+4-1}{4-1},$$
$$|A_3| = \binom{3+4-1}{4-1}\ , |A_4| = \binom{1+4-1}{4-1}\ , |A_1 \cap A_2| = \binom{2+4-1}{4-1}\ , |A_1 \cap A_3| = 1\ ,$$
$$|A_1 \cap A_4| = 0\ , \quad |A_2 \cap A_3| = 0\ , \quad |A_2 \cap A_4| = 0\ , |A_3 \cap A_4| = 0\ ,$$

כל החיתוכים בין 3 קבוצות הם גם מגודל 0 , החיתוך האחרון בין ארבעת הקבוצות הוא גם ריק, כלומר מגודל אפס. נעבור כעת לחשב את גודל הקבוצה $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}$:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| = |U| - (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|) + \cdots + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

$$= \binom{10+4-1}{4-1} - \left(\binom{7+4-1}{4-1} + \binom{5+4-1}{4-1} + \binom{3+4-1}{4-1} + \binom{1+4-1}{4-1}\right) + \left(\binom{2+4-1}{4-1} + 1 + 0\right) - 0 + 0$$
$$= \binom{13}{3} - \binom{10}{3} - \binom{8}{3} - \binom{6}{3} - \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + 1 = 97$$

תרגיל: (בעיית אי-סדר מוחלט) n אורחים במסעדה מוסרים בעת הכניסה את כובעיהם למלצר, ברגע היציאה מחזיר להם המלצר את הכובעים באופן אקראי, בכמה אופנים יכול המלצר להחזיר להם את הקובעים, כך שאף אורח לא מקבל את הקובע שלו.

פתרון: בעיות אי-סדר מוחלט מסוג זה פותרים באמצעות עקרון ההכלה וההדחה, והפתרון לבעיה זו הוא:

$$n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} \underbrace{0!}_{=1}$$
$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)!$$

U היא קבוצת כל ההתאמות החח"ע, $|U| = n!$.

A_i היא קבוצת ההתאמות החח"ע עם נקודת שבת אחת במספר i (כלומר המספר i עובר לעצמו, במקרה שלנו אורח i מקבל את הקובע שלו), $|A_i| = (n-1)!$. מספר קבוצות מסוג זה הוא $\binom{n}{1}$.

$A_i \cap A_j$ היא קבוצת ההתאמות החח״ע עם שתי נקודות שבת i ו- j, $\left|A_i \cap A_j\right| = (n-2)!$

מספר קבוצות מסוג זה הוא $\binom{n}{2}$ ... וכו׳.

תרגיל: תן הסבר קומבינטורי לזהות: $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \binom{n}{i}(n-i)^n = n!$

פתרון:

צד ימין של השוויון הוא מספר ההתאמות (הפונקציות) החח״ע מהקבוצה $N = \{1,2,\cdots,n\}$ לעצמה. צד שמאל של השוויון הוא אותו מספר פונקציות חח״ע מהקבוצה N לעצמה לפי עקרון ההכלה וההדחה, אם נסתכל על מספר הפונקציות ללא הגבלה שזה n^n פחות מספר הפונקציות שבהן איבר מסויים מופיע פעמיים בתמונה ועוד מספר הפונקציות שבהן שני איברים מסוימים מופיעים פעמיים בתמונה וכו׳.

תרגיל: בכמה אופנים שונים ניתן לחלק n כדורים זהים ו- n כדורים צבעוניים בצבעים שונים אחד מהשני, ל- $2n$ תאים כך שבכל תא מ- n התאים הראשונים יהיה לפחות כדור אחד.

פתרון: נגדיר A_i להיות קבוצת האפשריות לחלוקה בהן התא ה- i ריק $(1 \le i \le n)$. מתקיים כי:

$$\forall i : |A_i| = \underbrace{\binom{n+2n-1-1}{n}}_{\substack{\text{חלוקת } n \text{ כדורים} \\ \text{זהים ל } 2n-1 \text{ תאים} \\ \text{ללא הגבלה}}} \cdot \underbrace{(2n-1)^n}_{\substack{\text{חלוקת } n \text{ כדורים} \\ \text{שונים ל } 2n-1 \text{ תאים} \\ \text{ללא הגבלה}}}$$

כמו כן:

$$\forall i \neq j : \left|A_i \cap A_j\right| = \underbrace{\binom{n+2n-2-1}{n}}_{\substack{\text{חלוקת } n \text{ כדורים} \\ \text{זהים ל } 2n-2 \text{ תאים} \\ \text{ללא הגבלה}}} \cdot \underbrace{(2n-2)^n}_{\substack{\text{חלוקת } n \text{ כדורים} \\ \text{שונים ל } 2n-2 \text{ תאים} \\ \text{ללא הגבלה}}}$$

כאשר $A_i \cap A_j$ היא קבוצת האפשריות לחלוקה בהן התאים i ו- j ריקים. באופן דומה מגדירים את שאר קבוצות החיתוך ומשתמשים בעקרון ההכלה וההדחה. בסה״כ התשובה היא:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \binom{n}{i}\binom{n+2n-i-1}{n}(2n-i)^n$$
$$= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \binom{n}{i}\binom{3n-i-1}{n}(2n-i)^n$$

תמורות

הגדרה: נתונה קבוצת מספרים טבעיים $N=\{1,2,\cdots,n\}$. פונקציה $\sigma: N\to N$ על (או חח״ע)[1], נקראת תמורה. ומסמנים:

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n)\end{pmatrix}$$

תמורה המשאירה הכל במקום נקראת תמורת הזהות, ומסמנים:

$$e=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

הגדרה: מכפלה של תמורות: נתונות שתי תמורות $\sigma,\tau : N\to N$ אזי התמורה $\sigma\cdot\tau$ מוגדרת ע״י:

$$\sigma\cdot\tau(i)=\sigma\big(\tau(i)\big)\quad \forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$$

דוגמא: עבור שתי התמורות $\sigma,\tau : \{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$ המוגדרות באופן הבא:

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\quad ,\quad \tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

מתקיים

$$\tau\cdot\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix},\quad \sigma\cdot\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

הערה: בדרך כלל $\tau\cdot\sigma\neq\sigma\cdot\tau$

תרגיל: חשבו $\sigma\cdot\tau$ כאשר $\sigma,\tau : \{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}$ מוגדרות ע״י

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}\quad ,\quad \tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\sigma\cdot\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

הגדרה: אוסף כל התמורות של n יחד עם פעולת הכפל נקראת חבורה[2] סימטרית S_n.

דוגמאות: להלן שתי דוגמאות לשתי חבורות סימטריות S_2,S_3:

$$S_2=\left\{e=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix},\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

[1] במקרה זה הפונקציה היא על אם״ם היא חח״ע.

[2] חבורות, זה מושג מאוד שימושי שמגדירים באלגברה לינארית ואלגברה מודרנית.

$$S_3=\begin{Bmatrix} e=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\\ \sigma_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\sigma_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\sigma_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\end{Bmatrix}$$

משפט: מספר התמורות ב- S_n הוא $n!$. (ההוכחה בקומבינטורקה פשוטה).

הגדרה: מעגל cycle : מעגל מסדר k הוא תמורה בה k איברים מחליפים ביניהם מקומות באופן מעגלי, את המעגל מסמנים ע"י כתיבת איברי המעגל בסוגריים.

דוגמא: σ מעגל מסדר 4 מוגדר ע"י

$$\sigma=(1\ 2\ 5\ 3)\in S_5$$

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&1&4&3\end{pmatrix}$$

הגדרה: חילוף או טרנספוזיציה הוא מעגל מסדר 2 .

משפט: כל תמורה ניתן להציג אותה כמכפלת מעגלים.

דוגמא:

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&4&5&1&3&5\end{pmatrix}=(1\ 2\ 4)(3\ 5)$$

תרגיל: הציגו את התמורות הבאות כמכפלת מעגלים:

1. $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&5&4\end{pmatrix}$
2. $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$

פתרון:

1. $\sigma=(1\ 2)(4\ 5)$
2. $\tau=(1\ 3)$ (חילוף)

משפט: כל תמורה יכולה להיכתב כמכפלה של חילופים.

וקל להוכיח כי לכל מעגל : $(a_1a_2a_3\ \cdots a_k)=(a_2a_3)(a_3a_4)\cdots(a_ka_1)$.

תרגיל: הציגו את התמורות הבאות כמכפלת חילופים:

1. $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&2&1\end{pmatrix}$

2. $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&5&4&7&6&2&1\end{pmatrix}$

פתרון:

1. $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&2&1\end{pmatrix}=(1\ 5)(2\ 4)$

2. $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&5&4&7&6&2&1\end{pmatrix}=(1\ 3\ 4\ 7)(2\ 5\ 6)=$
$(3\ 4)(4\ 7)(7\ 1)(5\ 6)(6\ 2)$

הגדרה: סימן של תמורה:

תמורה שניתן להציג כמכפלה של מספר זוגי של חילופים נקראת תמורה זוגית, ואילו תמורה שהיא מכפלה של מספר אי-זוגי של חילופים נקראת אי-זוגית. הפונקציה:

$$\operatorname{sign}(\sigma)=\begin{cases}1, & \sigma\ \text{זוגית}\\-1, & \sigma\ \text{איזוגית}\end{cases}$$

נקראת פונקצית הסימן של תמורה.

דוגמא: עבור שתי התמורות σ ו τ מתרגיל קודם מתקיים $\operatorname{sign}(\sigma)=1\ ,\ \operatorname{sign}(\tau)=-1$

תרגיל: חשב את הסימן של התמורות הבאות:

1. $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&1&5\end{pmatrix}$

2. $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$

פתרון:

1. $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&1&5\end{pmatrix}=(1\ 2\ 3\ 4)=(2\ 3)(3\ 4)(4\ 1)$
$\Rightarrow \operatorname{sign}(\sigma)=-1$

2. $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=(1\ 3\ 2)=(3\ 2)(2\ 1)\quad\Rightarrow \operatorname{sign}(\tau)=1$

מפתח מונחים

מתמטיקה

צעד ראשון להצטיינות

אסלאם עכריה

לואי עבדאללה

math.haifa.ac.il/iakaria

is.haifa.ac.il/~aLoai/