אלגברה לינארית – ב'
לקט שאלות שהיו (ושלא היו) בעבר

1. ידוע כי מטריצה $A \in Mat_n$ אנטי-סימטרית ($A^t = -A$). אם n מספר אי-זוגי, הוכיחו כי המטריצה אינה הפיכה.

2. ידוע כי אופרטור f על מרחב וקטורי V מעל המרוכבים מקיים את התכונה $f^n = 1$. הוכח כי f ניתן לליכסון.

3. יהיו f, g שני אופרטורים <u>מתחלפים</u> במרחב וקטורי V . יהי λ ערך עצמי של f ויהי V_λ מרחב הווקטורים העצמיים עם ערך עצמי λ עבור אופרטור f. הוכח כי V_λ הוא אינווריאנטי ביחס ל- g .

4. מצא כל מטריצות 3×3 המקיימות את המשוואה $A^4 + A^2 = 0$. מהו הפולינום האופייני והפולינום המינימאלי בכל אחד מהמקרים?

5. מצא כל מטריצות 4×4 המקיימות את המשוואה $(A^2 - 5A + 4)^2 = 0$.

6. יהי V מרחב המטריצות הממשית 2×2 , ואופרטור $f: V \to V$ מוגדר על-ידי הנוסחא $f(X) = AX$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 11 \\ 01 \end{pmatrix}$.
מהו הפולינום האפייני והפולינום המינימלי של f?

7. מצא את הפולינום המינימלי של הסיבוב A בזווית $\frac{\pi}{3}$ של R^3 מסביב לציר המוגדר על-ידי הווקטור $v = (1,1,1)$.

8. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. חשב A^{100} .

9. עבור אלה ערכים של פרמטר $c \in \mathbb{R}$ התבנית הריבועית
$$Q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_2^2 + cx_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$
מוגדרת חיובית?

10. נגדיר תבנית דו-ליניארית על אוסף מטריצות $Mat_n(\mathbb{R})$ על-ידי הנוסחא
$$B(X,Y) = tr(XY)$$
א. הוכיחו כי B סימטרית.
ב. במקרה $n = 2$ מצאו בסיס בו התבנית מיוצגת על-ידי מטריצה אלכסונית. כמה רכיבים חיוביים וכמה שליליים על האלכסון?

11. יהי V מרחב וקטורי של פולינומים ממשיים בעלי מעלה ≤ 2 .
הנוסחא

$$(f|g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

מגדירה מכפלה פנימית.
מצאו בסיס אורתונורמאלי ל- V.

12. תהי $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ מטריצה של תבנית ריבועית ב- R^3 עם מכפלה פנימית סטנדרטית. מצא בסיס אורתוגונאלי בו B מיוצגת על-ידי מטריצה אלכסונית.

13. תהי B תבנית דו-ליניארית סימטרית על מרחב וקטורי ממשי V.

הוכח כי קיים וקטור $0 \neq v \in V$ עם $B(v,v) = 0$ אם ורק אם B איננה חיובית, וגם $-B$ איננה חיובית.

14. תהי B תבנית דו-ליניארית סימטרית מעל $\mathbb{C}$. הוכח כי קיים וקטור $v \neq 0$ המקיים $B(v,v) = 0$.
15. נתון כי דרגת האופרטור שווה ל-1. הוכח כי קיים λ כך ש- $f^2 = \lambda f$.
16. נתון כי לאופרטור קיים ויחיד תת-מרחב אינווריאנטי בעל מימד 1. מה היא צורת ז'ורדן?
17. לשני אופרטורים אותו פולינום אפייני ואותו פולינום מינימלי. האם זה גורר כי יש להם אותה צורת ז'ורדן?
18. הוכח כי אם $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ שורשים של הפולינום האפייני של אופרטור A, אזי

$$tr(A^k) = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k$$

19. יהי A אופרטור. יהי f פולינום כך ש- $f(A) = 0$. נניח $f = gh$ כאשר g, h זרים זה לזה. הוכח כי קיים בסיס בו לאופרטור A צורה $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ כאשר $g(A_1) = 0,$ $h(A_2) = 0$.
20. מצא בסיס אורתוגונאלי למרחב מטריצות ממשיות 2×2 ביחס לתבנית $f(X,Y) = tr(XY)$. מצא גם את הסיגנטורה של התבנית.
21. מצא בסיס אורתוגונאלי במרחב $\mathbb{R}^4$ לתבנית ריבועית $Q = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$.
22. הוכח כי התבנית $f(X,Y) = tr(XY)$ על אוסף מטריצות אנטי-סימטריות היא שלילית.