מכפלה פנימית - מקרה ממשי

1. תבנית בי-לינארית סימטרית $B : V\times V \to \mathbb{R}$
נקראת מוגדרת חיובית (positively definite) אם
$$B(x,x) > 0$$
לכל $0\neq x\in V$.
שם אחר לתבנית סימטרית מוגדרת חיובית - מכפלה פנימית.

תבנית כזאת בהכרח בלתי מנוונת שכן אם $x\in Ker(B)$,
ז.א. אם לכל y מתקיים $B(x,y)=0$ אז בוודאי $B(x,x)=0$
$\Leftarrow x=0$.

2. גיאומטריה הקשורה למכפלה פנימית.
נגדיר $\|x\|=\sqrt{B(x,x)}$ - הערך החיובי של השורש.
נגדיר מרחק בין שתי נקודות $x,y\in V$:
$$d(x,y) = \|x-y\|.$$
זהו מספר חיובי עבור $x\neq y$; נוכיח כי הוא מקיים
אי-שוויון המשולש:

משפט לכל $u,v\in V$ מתקיים
$$|B(u,v)| \le \|u\|\cdot\|v\|$$
הוכחה ברור אם $v=0$. נניח כי $v\neq 0$. נגדיר
$$z = u - \frac{B(u,v)}{B(v,v)}\cdot v$$
המספר $\lambda = \frac{B(u,v)}{B(v,v)}$ מתקבל כפתרון יחיד של המשוואה
$$B(z,v)=0.$$
ואמנם,
$$B(u-\lambda v, v) = B(u,v) - \lambda B(v,v)$$
כך שהמספר מתאפס אם ורק אם λ כמו מצוין בלעיל.

עבור זוג וקטורים אורתוגונליים מתקיים "משפט פיתגורס":

$$\|az+bv\|^2 = a^2\|z\|^2 + b^2\|v\|^2$$

- זה נובע מיד מדו-ליניאריות של B ומהעובדה $B(v,z)=0$.
בפרט, עבור $u=z+\lambda v$ מתקיים

$$\|u\|^2 = \|z\|^2 + \frac{B(u,v)^2}{B(v,v)^2}\|v\|^2 \geq \frac{B(u,v)^2}{B(v,v)}.$$

אי-שוויון האחרון ניתן לשכתב

$$\|u\|^2\|v\|^2 \geq B(u,v)^2$$

או

$$\|u\|\cdot\|v\| \geq |B(u,v)|$$

סוף ההוכחה

מסקנה: עבור שני וקטורים $u,v\neq 0$ ניתן להגדיר זווית φ על-ידי הנוסחה

$$\frac{B(u,v)}{\|u\|\cdot\|v\|} = \cos\varphi$$

$0 \leq \varphi \leq \pi$.

3. אורתוגונליזציה של גרם-שמידט (Gram-Schmidt).
לפי המשפט שהוכחנו עבור תבנית סימטרית כללית, קיים בסיס אורתוגונלי עבור מכפלה פנימית.
תהליך מציאת בסיס כזה פשוט במיוחד במקרה זה, שכן כל וקטור שונה מ-0 מקיים את התכונה $B(v,v)\neq 0$ הנחוצה לצעד אינדוקציה.

נתאר את התהליך באופן פורמלי.

יהי V מרחב וקטורי עם מכפלה פנימית B.
יהי $v_1,\dots,v_n$ בסיס ב-V.

אנחנו נבנה בסיס אורתוגונלי $w_1,\dots,w_n$
המקיים את התכונה הבאה:

$$w_k - v_k \in \text{Span}\{v_1,\dots,v_{k-1}\}$$

בסיס אורתוגונלי אם תכונה זו יהיה יחיד. התכונה אומרת כי

$$w_1 = v_1$$
$$w_2 - v_2 \in \text{Span}\{v_1\}$$
$$\dots\dots\dots$$
$$w_n - v_n \in \text{Span}\{v_1,\dots,v_{n-1}\}$$

בפרט, יתקיים עבור כל k
$$\text{Span}\{w_1,\dots,w_k\} = \text{Span}\{v_1,\dots,v_k\}$$

- את זה אפשר להסיק באינדוקציה כי אם
$\text{Span}\{w_1,\dots,w_{k-1}\} = \text{Span}\{v_1,\dots,v_{k-1}\}$
אז את w_k ניתן לבטא דרך $v_1,\dots,v_k$, וגם
את v_k ניתן לבטא דרך $w_1,\dots,w_k$.

מציאת w_2: זה תהליך מוכר לנו: אני מחפשים λ: $w_2 = v_2 - \lambda v_1$ ניצב ל- v_1. התשובה היחידה היא

$$\lambda = \frac{B(v_1,v_2)}{B(v_2,v_2)}$$

מציאת w_k: באותה דרך נחפש

$$w_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i w_i$$

(הערה: ניתן באותה דרך לכתוב $w_k = v_k - \sum \mu_i v_i$, אך
כאן לא נקבל נוסחאות יפות עבור μ_i)

הדרישה $B(w_k, w_i) = 0$, $i=1,\dots,k-1$, נותנת משוואות

$$0 = B(v_k, w_i) - \lambda_i B(w_i, w_i)$$

זאת אומרת,

$$\lambda_i = \frac{B(v_k, w_i)}{B(w_i, w_i)}$$

זהו סוף התהליך.

נציין כי מטריצת מעבר לבסיס חדש משולשית עליונה עם 1 באלכסון. בפרט, דטרמיננטה שלה שווה ל-1, ככה מתקיים

$$\det \tilde{B} = \det \tilde{B}'$$

- דטרמיננטות של מטריצות המייצגות את המכפלה הפנימית בשני הבסיסים - המקורי $\{v_1, \dots, v_n\}$ והאחד שמתקבל על ידי תהליך גרם-שמידט, שווים.

נציין עובדה: אם B מכפלה פנימית על מרחב וקטורי V, ואם $W \subset V$, אז צמצום של B על W גם מכפלה פנימית (ובפרט, בלתי-מנוונת).

4. נחזור שוב לתהליך גרם-שמידט. יהי $v_1, \dots, v_n$ בסיס מקורי, ואילו $w_1, \dots, w_n$ בסיס שהתקבל על ידי תהליך גרם-שמידט.

נסמן $V_i = \mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_i\} = \mathrm{Span}\{w_1, \dots, w_i\}$
$B_i = B|_{V_i}$

בבסיס $\{v_1, \dots, v_i\}$ $\Leftarrow$ $\Delta_i = \det \tilde{B}_i$

לפי האמור לעיל, מתקיים גם כי $\Delta_i = \det \tilde{B}_i'$ - דטרמיננטה של מטריצה מייצגת של B_i בבסיס $\{w_1, \dots, w_i\}$.

נזכיר עתה כי $\tilde{B}'$ מטריצה אלכסונית $\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$
כאשר $d_i = B(w_i, w_i)$.

<u>מסקנה</u>: $B(w_i, w_i) = \Delta_i / \Delta_{i-1}$.

<u>משפט</u> תהי B תבנית סימטרית על $V = \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$
יהיו Δ_i דטרמיננטות של מטריצות $\tilde{B}_i$ כמו
מוגדר קודם.
אזי B מוגדרת חיובית אם ורק אם $0 < \Delta_i$.

<u>הוכחה</u> כיוון אחד ברור: אם B מוגדרת חיובית,

$$\Delta_i = B(w_i, w_i)\, B(w_{i-1}, w_{i-1}) \ldots B(w_1, w_1) > 0.$$

בכיוון הנגדי, אנחנו שוב בוחנים את תהליך גרם-שמידט.
עכשיו צריך להזהר, כי אנחנו לא יודעים מראש
שהתבנית B מוגדרת חיובית. מה שידוע לנו הוא
שכל הדטרמיננטות $\Delta_i = \det \tilde{B}|_{V_i}$ חיוביות, ונצטרך
להוכיח באינדוקציה כי $B(w_i, w_i) > 0$ לכל i.

עבור $i=1$ זה ברור כי $w_1 = v_1$ ולכן $B(w_1, w_1) = \Delta_1 > 0$.
נניח כי הגדרנו $w_1, \ldots, w_k$ על-ידי הנוסחא

$$w_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{B(v_i, w_j)}{B(w_j, w_j)} \cdot w_j$$

וכי לכל $i = 1, \ldots, k$ מתקיים $B(w_i, w_i) > 0$. זה מאפשר
לנו להגדיר w_{k+1} לפי אותה הנוסחא

$$w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{B(v_{k+1}, w_j)}{B(w_j, w_j)} \cdot w_j$$

ועלינו רק לוודא כי $B(w_{k+1}, w_{k+1}) > 0$. אבל, כמו קודם,

מתקיים $\Delta_{k+1} = B(w_1,w_1)\cdots B(w_{k+1},w_{k+1})$

ומכיוון ש- $0<\Delta_{k+1}$ וגם כל הגורמים מצד ימין פרט ל- $B(w_{k+1},w_{k+1})$ חיוביים, גם $B(w_{k+1},w_{k+1})$ חייב להיות חיובי.
זה מוכיח את המשפט.

5. מציאת בסיס אורתונורמלי

מודיפיקציה קטנה של אלגוריתם גרם-שמידט מאפשרת לבנות בסיס אורתונורמלי. יש להגדיר

$$w_1 = v_1 \; ; \qquad e_1 = w_1 / \sqrt{B(w_1,w_1)}$$

...

$$w_k = v_k - \sum B(v_k, e_i) e_i \quad ; \quad e_k = w_k / \sqrt{B(w_k,w_k)} .$$

...

6. יהי $e_1,\dots,e_n$ בסיס אורתונורמלי של מרחב וקטורי V ביחס למכפלה פנימית $B:V\times V\to\mathbb{R}$.
אם $v=\sum c_i e_i \in V$, מתקיים

$$. B(v,e_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i B(e_i,e_j) = c_j$$

זה מאפשר לכתוב עבור כל וקטור $v\in V$

$$v = \sum_{i=1}^{n} B(v,e_i) e_i$$

7. דוגמה - פולינומי Legendre

יהי $V=\mathbb{R}[t]_n$ — מרחב הפולינומים מעל $\mathbb{R}$ בעלי מעלה קטנה או שווה ל-n.

נגדיר מכפלה פנימית $B: V\times V \to \mathbb{R}$ ע"י הנוסחא

$$B(v,w)=\int_{-1}^{1} v(t)\cdot w(t)\,dt$$

נשתמש בתהליך גרם-שמידט כדי למצוא בסיס אורתוגונלי. נבחר בתור בסיס מקורי את בסיס הסטנדרטי: $v_0=1,\ v_1=t,\ \dots,\ v_n=t^n$.

נקבל

$$w_0=v_0=1$$

$$\dots$$

$$w_k=t^k-\sum\frac{B(t^k,w_i)}{B(w_i,w_i)}w_i$$

(עד כדי קבוע)

אפשר להוכיח כי סדרת הפולינומים w_k היא סדרת פולינומי Legendre המוגדרת ע"י הנוסחא

$$P_0=1$$
$$P_1=t$$

$$(k+1)P_{k+1}=(2k+1)t\cdot P_k-kP_{k-1}$$

למשל,

$$w_1=t-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}t\,dt=t=P_1$$

$$w_2=t^2-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}t^2dt-\int_{-1}^{1}t^3dt\Big/\int_{-1}^{1}t^2dt=t^2-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}P_2$$

וכו'.

8. מטריצות אורתוגונליות

הגדרה מופשטת:
יהי V מרחב וקטורי ממשי עם מכפלה פנימית B.
אופרטור $f: V \to V$ נקרא אורתוגונלי אם
הוא "שומר על מכפלה פנימית":

$$B(v,w) = B(f(v), f(w)) \quad (\star)$$

נבחר בסיס אורתונורמלי $e_1, \dots, e_n$ ב- V:

$$B(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

למה אופרטור f אורתוגונלי אם ורק אם מטריצה A
המייצגת את f בבסיס $e_1, \dots, e_n$ (בסיס אורתונורמלי)
מקיימת את התכונה

$$A^t = A^{-1}$$

$$\boxed{\text{מטריצות כאלה נקראות מטריצות אורתוגונליות}}$$

הוכחה עמודות של A הן תמונות $f(e_1), \dots, f(e_n)$.
התכונה $A^t = A^{-1}$ שקולה לתכונה $A^tA = I$ והיא
בדיוק אומרת כי
$$B(f(e_i), f(e_j)) = \delta_{ij}.$$

מה שנשאר הוא להוכיח כי אם התכונה $(\star)$ מתקיימת
עבור כל זירוג של איברי בסיס, היא מתקיימת עבור כל
זוג וקטורים. הנה ההוכחה.

יהיו $v = \sum c_i e_i$, $w = \sum d_i e_i$. אנחנו עדיין
מניחים כי $\{e_i\}$ בסיס אורתונורמלי, כך ש-

$$B(v,w) = \sum c_i d_i.$$

9 אז $f(v)=\sum c_i f(e_i)$, $f(w)=\sum d_i f(e_i)$,

כך שמתקיים

$$B(f(v),f(w))=\sum_{i,j} c_i d_j B(f(e_i),f(e_j))=\sum_i c_i d_i$$

וזהו סוף ההוכחה.

למה $\det A=\pm 1$ אם A אורתוגונלית: $\det(A)\cdot\det(A^t)=1$

דוגמא מטריצות אורתוגונליות 2×2:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$$

$$A^t=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d\end{pmatrix}$$

המשוואות הן:

$$\begin{cases} a^2+c^2=1 \\ b^2+d^2=1 \\ ab+cd=0\end{cases}$$

קל מאוד להסיק כי מטריצה כזאת היא מהצורה

$$A=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

אם $\det(A)=1$ (סיבוב בזווית φ).

ואם $\det(A)=-1$, היא מהצורה $A=\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix}$ (שיקוף)

9. פירוק ה-QR.

תהליך גרם-שמידט מאפשר להוכיח משפט פירוק הבא שיש לו שימושים במתמטיקה שימושית:

<u>משפט</u>: את כל מטריצה ריבועית A ניתן להציג כמכפלה

$$A=QR$$

כאשר Q מטריצה אורתוגונלית, ואילו R מטריצה משולשית עליונה.

<u>הוכחה:</u>

יהיו $a_1,\dots,a_n$ עמודות של A. נתייחס אליהן כאל וקטורים במרחב בעל מכפלה פנימית

$$B(a,b)=\sum \alpha_i\beta_i$$

כאשר $a=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$.

נגדיר $e_1=\dfrac{w_1}{\sqrt{B(w_1,w_1)}}$; $w_1=a_1$;

(★★) . . .

$$w_k=a_k-\sum_{i=1}^{k-1}B(a_k,e_i)\,e_i$$

. . . . .

נקבל לבסוף מערכת וקטורים $e_1,\dots,e_n$ אורתונורמלית.
המטריצה $Q=(e_1,\dots,e_n)$ היא אורתוגונלית.
המטריצה

$$Q^{-1}A\ \cancel{AQ}=R$$

היא משולשית עליונה: את המשוואות (★★) ניתן לפרש כמשוואות למציאת a_i דרך e_i:

$$a_1=e_1\sqrt{B(w_1,w_1)}$$

. . . . .

$$a_k=e_k\sqrt{B(w_k,w_k)}+\sum_{i=1}^{k-1}B(a_k,e_i)\,e_i$$

נ"ב כי $\sqrt{B(w_k,w_k)}=B(a_k,e_k)$ כך שהמשוואה נותנת

$$a_k=\sum_{i=1}^{k}B(a_k,e_i)\,e_i$$

המטריצה R בנויה מ $r_{ik}=B(a_k,e_i)$ – משולשית עליונה.