# אופרטורים אורתוגונאליים ואופרטורים צמודים לעצמם.

שדה הבסיס כאן – שדה הממשיים.

יהי $V$ מרחב וקטורי עם מכפלה פנימית $v,w \mapsto (v \mid w)$.
כפי שראינו קודם, מכפלה פנימית מגדירה מושג של מרחק ב- $V$.

**1. הגדרה.** אופרטור לינארי $f:V \to V$ נקרא <u>אורתוגונאלי</u> אם הוא שומר על מרחק זה:
$d(x,y) = d(f(x), f(y))$ לכל $x,y \in V$.
**הגדרות שקולות.**
אם ניקח בחשבון כי המרחק מוגדר על-ידי הנוסחה $d(x,y) = \| x-y \|$, מקבלים ניסוח אחר של אורתוגונאליות:
$\| f(x) - f(y) \| = \| x-y \|$.
כיוון ש- $f$ לינארית, $f(x) - f(y) = f(x-y)$, כך שברור כי $f$ אורתוגונאלי אם ורק אם $\| f(x) \| = \| x \|$ **לכל** $x \in V$.
הגדרה שקולה אחרונה: $(x \mid y) = (f(x) \mid f(y))$ לכל $x,y \in V$.
ואמנם, $(x \mid y) = \frac{1}{2}(\| x+y \|^2 - \| x \|^2 - \| y \|^2)$ וכך ששמירה של נורמות גוררת שמירה של המכפלה הפנימית.

**2. מטריצות אורתוגונאליות.**

נבחר בסיס אורתונורמאלי $v_1, \ldots, v_n$ של $V$.
אם $v = \sum c_i v_i$, $f(v) = \sum c_i f(v_i)$. נובע מכך ש- $f$ אורתוגונאלי אם ורק אם $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ גם כן בסיס אורתונורמאלי.

אם $C$ המטריצה המיצגת של $f$ בבסיס $v_1, \ldots, v_n$, אורתונורמאליות של קבוצת הוקטורים $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ שקולה לתכונה $C^* C = I$ או $C^{-1} = C^*$.

מטריצות המקיימות תכונה זו נקראות <u>מטריצות אורתוגונאליות</u>.

**3. תכונות מידיות.**

- אם $C$ מטריצה אורתוגונאלית, $1 = \det(C^* C) = \det(C)^2$, כך שבהכרח $\det(C) = \pm 1$.
- אם $C, C'$ שתי מטריצות אורתוגונאליות, מכפלתן $CC'$ גם כן אורתוגונאלית:
  $(CC')^* CC' = C'^* C^* CC' = I$.
- אם $C$ מטריצה אורתוגונאלית, ההפכית $C^{-1}$ גם היא אורתוגונאלית:
  $(C^{-1})^t = C^{tt} = C = (C^{-1})^{-1} \Leftarrow C^t = C^{-1}$.

<u>סימון</u>: אוסף מטריצות אורתוגונאליות $n \times n$ מסמנים $O(n)$.
אוסף מטריצות אורתוגונאליות $n \times n$ בעלות דטרמיננטה 1 מסמנים $SO(n)$.

<u>הערה</u>. הקבוצות $O(n), SO(n)$ – <u>חבורות</u>. חבורה היא קבוצה עם פעולת כפל המקיימת חוק קיבוץ וכך שלכל איבר קיים הופכי.
עוד דוגמאות של חבורה: $GL(n,k)$ (כל מטריצות הפיכות $n \times n$ מעל שדה $k$,
$SL(n,k)$ (מטריצות $n \times n$ מעל $k$ בעלות דטרמיננטה 1.

מטריצה $1\times1$ אורתוגונאלית אם ורק אם היא מיוצגת על-ידי $\pm1$.

**4. דוגמה:** $n=2$.

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ אורתוגונאלית אם ורק אם $a^2+c^2=1; b^2+d^2=1; ab+cd=0$.

קל לראות כי קיימת ויחידה זווית $\alpha\in[0,2\pi)$ כך ש- $a=\cos\alpha, c=\sin\alpha$.

זה נותן שני פתרונות לעמודה $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$: אם $\det(A)=1$ אז $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$ ואם $\det(A)=-1$ אז $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}$.

**מסקנה.** מטריצה אורתוגונאלית $2\times2$ בעלת דטרמיננטה 1 היא מטריצה של סיבוב $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. אם הדטרמיננטה שווה ל- $-1$, המטריצה בצורה $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$.

במקרה זה אפשר למצוא בסיס בו המטריצה תיראה עוד יותר טוב. לשם כך נחשב פולינום אופייני של המטריצה. הוא שווה ל-

$$P(t)=\det\begin{pmatrix} t-\cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & t+\cos\alpha \end{pmatrix}=(t-\cos\alpha)(t+\cos\alpha)-\sin^2\alpha=t^2-1.$$

לפיכך למטריצה שני ערכים עצמיים - $\pm1$. זה אומר כי קיים בסיס $\{v_1,v_2\}$ כך ש- $f(v_1)=v_1, f(v_2)=-v_2$. זה אומר כי האופרטור הוא שיקוף ביחס לציר המוגדר על-ידי $v_1$. הוקטורים $v_1,v_2$ בהכרח אורתוגונאליים.

**5. מיון אופרטורים אורתוגונאליים.**

נסמן $A(\alpha)=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

**משפט.** עבור כל אופרטור אורתוגונאלי קיים בסיס שבו המטריצה המיצגת היא בצורת בלוקים, כאשר כל בלוק הוא או $A(\alpha)$ או $\pm1$.

כדי להוכיח את המשפט, נצטרך בלמה הבאה:

**למה.** יהי $f$ אופרטור אורתוגונאלי על מרחב וקטורי $V$ בעל מכפלה פנימית.

יהי $W\subseteq V$ תת-מרחב אינווריאנטי. אזי $W^\perp$ גם כן אינווריאנטי.

**הוכחת הלמה.**

$f$ איזומורפיזם כי $\det(f)=\pm1$. לכן, אם $f(W)\subseteq W$, בהכרח $f(W)=W$.

אם $y\in W^\perp$ נוכיח $f(y)\in W^\perp$. ואמנם, לכל $x\in W$ מתקיים $(f(y)\mid x)=(y\mid f^{-1}(x))=0$ כי $f^{-1}(x)\in W$.

**סוף הוכחת הלמה.**

**הוכחת המשפט.** באינדוקציה.

יהי $\lambda$ ערך עצמי של אופרטור $f$. היות ו- $f$ אופרטור במרחב וקטורי מעל הממשיים, מקדמים של הפולינום האופייני של $f$ ממשיים. לכן, קיימות שתי אפשרויות.

1. $\lambda$ שורש ממשי.

2. $\lambda$ לא ממשי ו- $\bar{\lambda}$ גם כן שורש של הפולינום האופייני.
במקרה הראשון קיים וקטור עצמי (ממשי) $v \in V$ עם ערך עצמי $\lambda$.
אורתוגונאליות גוררת $\|v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$, זאת אומרת $\lambda = \pm 1$.
מצאנו תת-מרחב $W = Span\{v\}$ אינווריאנטי ולפי הלמה $W^{\perp}$ גם כן אינווריאנטי.
לפי הנחת האינדוקציה קיים בסיס ב- $W^{\perp}$ כפי שנדרש במשפט, והוספת וקטור $v$ לאיברי בסיס תשלים לנו את הבסיס.

במקרה השני וקטור עצמי עבור $\lambda$ לא שייך ל- $V$ (כי יש לו קואורדינאטות מרוכבות).
נרשום אותו בצורה $v_1 + iv_2$ כאשר $v_1, v_2 \in V$.
אם $\lambda = a + ib$, מקבלים $f(v_1 + iv_2) = (a+ib)(v_1 + iv_2)$ וזה נותן

$$\begin{cases} f(v_1) = av_1 - bv_2 \\ f(v_2) = bv_1 + av_2 \end{cases}.$$

תת-מרחב $W = Span\{v_1, v_2\}$ דו-מימדי אינווריאנטי. שוב לפי הלמה קיבלנו פרוק של $V$ כסכום של תתי-מרחב אינווריאנטיים $V = W \oplus W^{\perp}$ ונשתמש באינדוקציה.

## 6. תפקיד של המרחב הדואלי.

כמה מלים על תפקידו של מרחב דואלי.
בקורס זה מושג מרחב דואלי לא הוזכר (עד כה), אך זה נעשה מסיבות פוליטיות בלבד (כדי לא להפחיד).

נזכיר כי מרחב דואלי $V^*$ של מרחב $V$ הוא אוסף העתקות לינאריות $f: V \to k$ מ- $V$ לשדה הבסיסי $k$.
אם ב- $V$ נתונה תבנית דו-לינארית $B: V \times V \to k$, כל איבר $v \in V$ מגדיר העתקה לינארית $V \to k$ המעבירה $w$ ל- $B(v, w)$. כך אפשר לפרש כל תבנית דו-לינארית כהעתקה לינארית $\tilde{B}: V \to V^*$.
בסגנון זה אפשר לפרש גם את המטריצה המיצגת את $B$. יהי $v_1, \dots, v_n$ בסיס ב- $V$.
נזכיר שבחירה בסיס ב- $V$ מאפשרת לקבוע בסיס ב- $V^*$ (הנקרא בסיס דואלי):
זה אוסף איברים $v_1^*, \dots, v_n^*$ המוגדרים על-ידי הנוסחה $v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$.
אזי מטריצה המיצגת את התבנית $B$ בבסיס $v_1, \dots, v_n$ היא אותה מטריצה המיצגת את ההעתקה הלינארית $\tilde{B}: V \to V^*$ בבסיסים $v_1, \dots, v_n$ ו- $v_1^*, \dots, v_n^*$.
התבנית $B$ בלתי-מנוונת אם ורק אם $\tilde{B}$ איזומורפיזם.

נזכיר כי כל העתקה לינארית $f: V \to W$ מגדירה העתקה צמודה $f^*: W^* \to V^*$ על-ידי הנוסחה

$$f^*(\alpha) = \alpha \circ f: V \to W \to k.$$

בפרט, $\tilde{B}: V \to V^*$ נותנת $\tilde{B}^*: (V^*)^* = V \to V^*$.
אפשר לבדוק (בקלות) כי התבנית $B$ סימטרית אם ורק אם $\tilde{B} = \tilde{B}^*$.

## 7. אופרטורים צמודים. אופרטורים צמודים לעצמם.

יהי $V$ מרחב וקטורי עם מכפלה פנימית.

אם $f:V\to V$ אופרטור לינארי, אופרטור צמוד $f^*:V\to V$ מוגדר ע"י הנוסחה
$(f(v)\,|\,w)=(v\,|\,f^*(w))$.
[נוסחה כזאת אכן מגדירה את ההעתקה כי מכפלה פנימית בלתי-מנונת]

אם $v_1,\dots,v_n$ בסיס אורתונורמלי ב- $V$ ואם $f(v_j)=\sum_{i=1}^{n}c_{ij}v_i$ כך ש- $f$
מיוצגת על-ידי מטריצה $C=(c_{ij})$, אז השוויון $c_{ji}=(f(v_i)\,|\,v_j)=(v_i\,|\,f^*(v_j))$
נותן כי $f^*$ מיוצג על-ידי המטריצה $C^t$.

אופרטור $f:V\to V$ נקרא צמוד לעצמו אם $f=f^*$. במלים אחרות, $f$ צמוד לעצמו
אם לכל $v,w\in V$ מתקיים $(f(v)\,|\,w)=(v\,|\,f(w))$.
לפי מה שנאמר קודם, אופרטור צמוד לעצמו אם ורק אם הוא מיוצג בבסיס אורתונורמאלי
על-ידי מטריצה סימטרית.

אופרטורים צמודים לעצמם בעלי תכונות מיוחדות:

- כל הערכים העצמיים שלהם ממשיים.
- קיים בסיס אורתונורמאלי בו האופרטור מיוצג על-ידי מטריצה אלכסונית.

אנחנו נוכיח את התכונות האלה בסעיף הבא.

## 8. תכונות האופרטורים הצמודים לעצמם.

נתחיל במקרה של מימד 2.

תהי $A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & d\end{pmatrix}$ מטריצה סימטרית עם רכיבים ממשיים.

אנחנו נבדוק עתה כי ל- $A$ שני ערכים עצמיים ממשיים שונים.
ואמנם,
$$P_A(t)=(t-a)(t-d)-b^2=t^2-(a+d)t+ad-b^2\,.$$
הדיסקרימיננטה של המשוואה הריבועית לציאת הערכים העצמיים היא
$$(a+d)^2-4(ad-b^2)=(a-d)^2+4b^2>0\,.$$
לכן, לכל מטריצה סימטרית $2\times 2$ שני ערכים עצמיים ממשיים שונים.
יותר מאוחר נוכיח כי הוקטורים העצמיים המתאימים אורתוגונאליים.

**למה.** יהי $f$ אופרטור צמוד לעצמו על $V$. אם $W$ תת-מרחב כי אינווריאנטי
אזי המשלים שלו $W^\perp$ גם הוא אינווריאנטי.

**הוכחה** דומה למקרה אורתוגונאלי. אם $y\in W^\perp$, עלינו לבדוק כי $(x\,|\,f(y))=0$
לכל $x\in W$. אבל $(x\,|\,f(y))=(f(x)\,|\,y)=0$ כי $W$ תת-מרחב אינווריאנטי.

עכשיו אפשר להוכיח את המשפט הכללי באינדוקציה.

יהי $\lambda$ ערך עצמי של $f$. אם $\lambda$ ממשי, מתאים לו וקטור עצמי $v\in V$.
אז נגדיר $W=Span\{v\}$ ולפי הלמה נקבל פרוק $V=W\oplus W^\perp$ בסכום של שני
תתי-מרחב אינווריאנטיים אורתוגונאליים. המשפט נובע מהנחת האינדוקציה.

נניח עתה כי ערך עצמי $\lambda$ לא ממשי [זה בלתי אפשרי אך אנו עוד לא יודעים
להוכיח את זה].

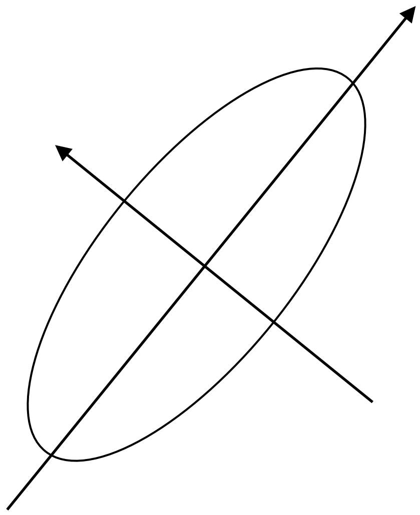
יהי $v_1+iv_2$ וקטור (עם קואורדינטות מרוכבות) עצמי המתאים לערך עצמי $\lambda$.
אזי, אם $\lambda=a+ib$, מתקיים $f(v_1+iv_2)=(a+ib)(v_1+iv_2)$ וזה אומר כי

$$\left\{\begin{array}{l} f(v_1)=av_1-bv_2 \\ f(v_2)=bv_1+av_2 \end{array}\right.,$$

כך שהמרחב $W=Span\{v_1,v_2\}$ אינווריאנטי. הצמצום של $f$ על $W$ גם הוא, בוודאי, צמוד לעצמו. לפי החישוב שעשינו במקרה של מימד 2, ערכים עצמיים לא ממשיים בלתי-אפשריים במקרה זה. הגענו לסתירה.

סוף הוכחת המשפט.

**9. שימוש: צורה קאנונית של תבנית ריבועית מעל R.**



צירי הסימטריה של האליפסה ניצבים זה לזה. אנחנו מתכוונים להכליל עובדה זו.

**משפט.** תהי $B$ תבנית ריבועית על מרחב וקטורי ממשי $V$ המצויד במכפלה פנימית.
אזי קיים בסיס אורתונורמאלי ב- $V$ בו התבנית $B$ מיוצגת על-ידי מטריצה אלכסונית.
**הערה.** קיום בסיס בו התבנית תיוצג על-ידי מטריצה אלכסונית ידוע לנו מזמן.
החידוש פה – קיום בסיס אורתונורמאלי ביחס למכפלה פנימית (שאין לה קשר לתבנית $B$).

**הוכחת המשפט.**
נבחר בסיס אורתונורמאלי כל שהוא $v_1,\ldots v_n$ במרחב $V$. התבנית $B$ תיוצג על-ידי מטריצה סימטרית. נסמן אותה ב- $A$ .
לפי סעיף 8, מטריצה סימטרית מיצגת אופרטור צמוד לעצמו. נסמן אותו ב- $f$ .

<u>הערה.</u> אפשר להסביר קשר בין התבנית $B$ לבין האופרטור $f$ הצמוד לעצמו מבלי להסתמך על בחירת בסיס $v_1,\ldots v_n$. נשאיר את זה כתרגיל למי שלא מרוצה בכך שאנו משתמשים בבסיס.

לפי המשפט שבסעיף 8, קיים בסיס אורתונורמאלי , נגיד, $w_1,\ldots w_n$ בו $f$ מיוצג על-ידי מטריצה אלכסונית.
אני טוען כי אותה מטריצה תיצג גם את התבנית $B$ .

קודם כל, למה זה לא ברור. כי אם $C$ מטריצת מעבר ואם $A$ מטריצה של אופרטור, אך

בבסיס החדש מטריצה של אותו אופרטור תהיה $C^{-1}AC$. אבל אם $A$ מטריצה של תבנית דו-לינארית, אז בבסיס החדש המטריצה של אותה תבנית תהיה $C^{t}AC$ מ – נוסחת החלפת בסיס עבור מטריצת אופרטור שונה מהנוסחה עבור מטריצת תבנית!

הגיע זמן להיזכר בכך ששני הבסיסים, $v_1,\dots v_n$ ו- $w_1,\dots w_n$, אורתונורמאליים, כך שמטריצת המעבר $C$ אורתוגונאלית.
לכן, $C^{-1}=C^{t}$ ושתי הנוסחאות, $C^{-1}AC$ ו- $C^{t}AC$, נותנות אותו דבר.