תבניות דו-לינאריות (המשך).

4. תבניות דו-לינאריות סימטריות ותבניות ריבועיות.

תהי $B:V\times V\to k$ תבנית דו-לינארית סימטרית. הפונקציה $Q:V\to k$ המוגדרת על-ידי הנוסחה $Q(x)=B(x,x)$ נקראת <u>התבנית הריבועית</u> של B.
נעשה חישוב פשוט:

$$Q(v+w)=B(v+w,v+w)=B(v,v)+2B(v,w)+B(w,w)=Q(v)+Q(w)+2B(v,w)$$

מעתה אנו מניחים כי $2\neq 0$ בשדה k (במלים אחרות, כי $char\ k\neq 2$).

מקבלים מיד:

$$B(v,w)=\tfrac{1}{2}(Q(v+w)-Q(v)-Q(w))$$

מסקנה: אם $char\ k\neq 2$, תבנית דו-לינארית מוגדרת באופן יחיד על-ידי התבנית הריבועית שלה.

אם התבנית הדו-לינארית B מיוצגת על-ידי המטריצה $\widetilde{B}=(b_{ij})$ בבסיס $v_1,\ldots,v_n$, אזי

$$Q(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_ix_j$$

כאשר $x=\sum_{i=1}^{n}x_iv_i$.

נציין בנפרד עוד מסקנה מהנוסחה המבטאת את $B(v,w)$ דרך Q:

אם $B(v,v)=0$ **לכל** $v\in V$ **אזי** $B(v,w)=0$ **לכל** $v,w\in V$.

5. משלים אורתוגונאלי.

תהי B תבנית די-לינארית סימטרית על V. יהי W תת-מרחב וקטורי.
משלים אורתוגונאלי $W^{\perp}$ של W מוגדר על-ידי הנוסחה

$$W^{\perp}=\{x\in V\mid B(x,y)=0\ \ \forall y\in W\}.$$

משפט. תהי B תבנית די-לינארית סימטרית על V, $v\in V$.
נניח כי $B(v,v)\neq 0$. אזי $V=Span(v)\oplus Span(v)^{\perp}$.

הוכחה. המשפט אומר כי לכל איבר $x\in V$ קיים פירוק יחיד $x=cv+w$ עם $c\in k,\ w\in Span(v)^{\perp}$.

נחפש $c\in k$ כך שההפרש $w=x-cv$ אורתוגונאלי ל-v.
$0=B(v,x-cv)=B(v,x)-cB(v,v)$. ברור כי הפתרון היחיד למשוואה הוא $c=\dfrac{B(v,x)}{B(v,v)}$.

6. קיום בסיס אורתוגונאלי.

משפט. תהי B תבנית די-לינארית סימטרית על מרחב V. קיים בסיס ב-V בו התבנית מיוצגת על-ידי מטריצה אלכסונית.

אם $v_1,\ldots,v_n$ בסיס של V, התבנית B מיוצגת בו על-ידי מטריצה אלכסונית

אם ורק אם $B(v_i,v_j)=0$ עבור $i\neq j$. בסיס כזה נקרא <u>בסיס אורתוגונאלי</u>.

הוכחת המשפט. אינדוקציה לפי המימד של V.
אם $\dim V=0$ אין מה להוכיח.
נניח כי קיום בסיס אורתוגונאלי הוכח עבור תבנית על מרחב וקטורי בעל מימד $n>$.
יהי $\dim V=n$.
אם $B(v,w)=0$ עבור כל $v,w\in V$ – אין מה להוכיח כי התבנית מיוצגת על-ידי מטריצת האפס בכל בסיס.
לכן אנו מניחים כי $B\neq 0$. לפי סעיף 4 קיים וקטור $v\in V$ עם $B(v,v)\neq 0$.
נסמן $W=Span(v)^{\perp}$. לפי המשפט של סעיף 5 $V=Span(v)\oplus W$. בפרט,
$\dim W=n-1$. לפי הנחת האינדוקציה, קיים בסיס אורתוגונאלי ב- W.
נסמן אותו $v_2,\ldots,v_n$. נשלים אותו לבסיס ב- V על-ידי $v=v_1$.
הבסיס שבנינו אורתוגונאלי כי $B(v_1,v_i)=0$ עבור $1<i$.

7. שדה המרוכבים.

במקרה $k=C$ אפשר לשפר עוד את הבסיס.

הערה. כל מה שנאמר בסעיף זה תקף לכל שדה בו קיים שורש ריבועי מכל איבר, למשל, לכל שדה סגור אלגברית.

יהי $v_1,\ldots,v_n$ בסיס אורתוגונאלי של V, כך ש- $B(v_i,v_j)=\begin{cases} b_{ii}, & i=j \\ 0, & i\neq j\end{cases}$.

לכל i כך ש- $b_{ii}\neq 0$ נבחר שורש ריבועי $\sqrt{b_{ii}}$ (ישנן שתי אפשרויות השונות בסימן)

ונגדיר $w_i=\dfrac{1}{\sqrt{b_{ii}}}v_i$; מקבים $B(w_i,w_i)=1$. אם $b_{ii}=0$ נגדיר $w_i=v_i$.

בדרך זו מצאנו בסיס אורתוגונאלי בו למטריצה המיצגת באלכסון רק 1 או 0.

עד כה עוד לא עסקנו ביחידות ההצגה.

משפט. יהיו $w_1,\ldots,w_n$ ו- $w_1',\ldots,w_n'$ שני בסיסים בהם B מיוצגת על-ידי מטריצות אלכסוניות שבאלכסון שלהן רק 1 או 0. אזי מספר פעמים 1 (או 0) מופיע באלכסון זהה לשתי המטריצות.
הוכחה. זה ממש פשוט: גרעין של B הוא נפרש על-ידי וקטורי הבסיס w_i המקיימים $B(w_i,w_i)=0$. לכן, מספר האפסים באלכסון שווה (בשני המקרים) למימד הגרעין.

זה נותן מיון מלא של תבניות דו-לינאריות סימטריות מעל C: שני מספרים – מימד המרחב ומימד הגרעין – מגדירות את הצורה הקנונית האלכסונית.

8. שדה הממשיים.

במקרה מיוחד חשוב זה גם ניתן לקבל מיון מלא של תבניות דו-לינאריות סימטריות.
אנחנו כבר יודעים שעבור כל תבנית קיים בסיס אורתוגונאלי.

יהי $v_1,\ldots,v_n$ בסיס אורתוגונאלי. אם $b_{ii}>0$ נגדיר, כמו קודם, $w_i=\dfrac{1}{\sqrt{b_{ii}}}v_i$.

אם $b_{ii} < 0$ נגדיר $w_i = \frac{1}{\sqrt{-b_{ii}}} v_i$. לבסוף, אם $b_{ii} = 0$, נשאיר $w_i = v_i$.

כך אנחנו מקבלים בסיס אורתוגונאלי חדש בו על האלכסון רק 1, -1 או 0.
נוכיח כי מספר פעמים כל אחד מהם מופיע לא תלוי בבחירת בסיס.

משפט. יהיו $w_1, \ldots, w_n$ ו- $w'_1, \ldots, w'_n$ שני בסיסים בהם B מיוצגת על-ידי מטריצות אלכסוניות שבאלכסון שלהן רק $1, -1$ או 0. אזי מספר פעמים $1, -1$ ו- 0 מופיעים באלכסון זהה לשתי המטריצות.

הוכחה. נסדר את הבסיסים כך ש- $B(w_i, w_i) = \begin{cases} 1, & i \le k \\ -1, & k < i \le k+l \\ 0, & k+l < i \le n \end{cases}$,

ואילו $B(w'_i, w'_i) = \begin{cases} 1, & i \le k' \\ -1, & k' < i \le k'+l' \\ 0, & k'+l' < i \le n \end{cases}$.

עלינו להוכיח כי $k = k', l = l'$.

אנו נבדוק כי קבוצת הוקטורים $w_1, \ldots, w_k, w'_{k'+1}, \ldots, w'_n$ בלתי-תלויה.

ואמנם, נניח $\sum_{i=1}^{k} c_i w_i + \sum_{i=k'+1}^{n} d_i w'_i = 0$. יהי $x = \sum_{i=1}^{k} c_i w_i = -\sum_{i=k'+1}^{n} d_i w'_i$.

מצד אחד, $B(x,x) = \sum_{i=1}^{k} c_i^{\,2} B(w_i, w_i) = \sum_{i=1}^{k} c_i^2 \ge 0$, ומהצד השני

$$B(x,x) = \sum_{i=k'+1}^{n} d_i^{\,2} B(w'_i, w'_i) = \sum_{i=k'+1}^{k'+l'} (-d_i^2) \le 0.$$

השוואה של שתי הנוסחאות נותנת $c_i = 0$. כיוון ש- w'_i בלתי-תלויים לינארית, זה משלים את ההוכחה.