תבניות דו-לינאריות.

1. מבוא – דוגמאות.

בקורסי מתמטיקה ופיסיקה בתיכון למדתם מושג של מכפלה סקלרית של וקטורים ב- R^2 או ב- R^3.
פעולה זו מוגדרת על-ידי הנוסחה

$$v \cdot w = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

כאשר $v = (x_1, y_1, z_1),\ w = (x_2, y_2, z_2)$.
המכפלה הסקלרית מאפשרת לבדוק האם הוקטורים v, w ניצבים זה לזה: הם ניצבים אם ורק אם $v \cdot w = 0$. המכפלה הסקלרית נוחה מאוד גם לשם חישוב אורך הוקטור: $|v| = \sqrt{v \cdot v}$. גם הזווית בין הוקטורים v, w ניתן לבטא דרך המכפלה הסקלרית:

$$\cos\alpha = \frac{v \cdot w}{|v||w|}.$$

הגיע זמן לשאול איך יכולנו לחיות עד כה בלי מכפלה סקלרית!
ההסבר לכך שלא למדנו עד כה מכפלה סקלרית: כדי שהיא תהנה מהתכונות שתארנו, חובה עלינו לדאוג שהבסיס בו נשתמש יהי בנוי מוקטורים ניצבים זה לזה ובעלי אורך 1 (בקרוב לקרא לבסיס כזה <u>אורתונורמלי</u>).

ואין לנו דרך להסביר בעזרת אלגברה לינארית שאנו מכירים מה מהו וקטורים ניצבים או וקטור בעל אורך 1 (בבית הספר התיחסנו אל מרחב R^3 כאל "מרחב שאנו גרים בו" ולכן התייחסנו אל מושג המרחק או מושג הזווית כאל משהו מובן מאליו.

באלגברה לינארית מגדירים את המושגים האלה דרך מושג של מכפלה סקלרית.
להלן תכונות של מכפלה סקלרית שאנו למדנו בתיכון:

1. $(v_1 + v_2) \cdot w = v_1 \cdot w + v_2 \cdot w$ (לינאריות לפי הארגומנט הראשון)
2. $(cv) \cdot w = c(v \cdot w)$ (כנ"ל)
3. $v \cdot w = w \cdot v$ (סימטריות)
4. $v \cdot v > 0$ כאשר $v \neq 0$.

בתורת היחסות חשיבות רבה למכפלה בעלת תכונות קצת שונות:
מדובר במרחב R^4 שווקטור בו מתואר על-ידי 4 קואורדינאטות (x, y, x, t) כאשר x, y, z הקואורדינאטות הרגילות של גובה, רוחב ואורך, ואילו t קואורדינאטת הזמן.

המכפלה מוגדרת על-ידי הנוסחה

$$v \cdot w = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - c^2t_1t_2$$

כאשר $v = (x_1, y_1, z_1, t_1),\ w = (x_2, y_2, z_2, t_2)$, ואילו c היא מהירות האור (300,000 קמ' בשניה). מכפלה זו מקיימת תכונות 1-3 דלעיל אך לא תכונה 4:
אם $v = (ct, 0, 0, t)$ אז $v \cdot v = 0$ – זה מתאר את התפשטות האור $x = ct$.

מטרתנו לחקור מכפלות מהסוג שתיארנו.

2. הגדרות.

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה k.
פונקציה $B : V \times V \to k$ נקראת תבנית דו-לינארית אם:

1. $B(v_1 + v_2, w) = B(v_1, w) + B(v_2, w)$.

2. $B(cv,w)=cB(v,w)$.
3. $B(v,w_1+w_2)=B(v,w_1)+B(v,w_2)$.
4. $B(v,cw)=cB(v,w)$.

שתי התכונות הראשונות אומרות כי B לינארית לפי הארגומנט הראשון, ושתי התכונות האחרונות אומרות כי B לינארית לפי הארגומנט השני.

מטריצת התבנית.

כדי לתארהעתקה לינארית, כדאי לבחור בסיס, ולרשום את ההעתקהעל-ידי מטריצה.

אותו דבר אפשר לעשות עם תבניות דו-לינאריות.

יהי $v_1,\ldots,v_n$ בסיס של מרחב וקטורי V. זה אומר כי לכל $v\in V$ קיימת ויחידה דרך להציג $v=\sum_{i=1}^{n}x_iv_i$ כאשר $x_i\in k$.

יהיו $w=\sum_{i=1}^{n}y_iv_i$, $v=\sum_{i=1}^{n}x_iv_i$. אזי לפי הדו-לינאריות של B אנו מקבלים:

$$B(v,w)=B(\sum x_iv_i,\sum y_jv_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_jB(v_i,v_j)\ .$$

אנו רואים כי כדי לחשב $B(v,w)$, מספיק לדעת את הערכים $b_{ij}=B(v_i,v_j)$ – ואז נוכל לחשב $B(v,w)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ib_{ij}y_j$.

נרשום את האיברים b_{ij} כמטריצה $\widetilde{B}=(b_{ij})$. היא נקראת המטריצה ה מיצגת את התבנית B בבסיס $v_1,\ldots,v_n$ (שם מקובל אחר – מטריצת גרם (Gram) של התבנית).

נוח לשכתב את הנוסחה האחרונה כדלקמן.

$$B(v,w)=x^t\widetilde{B}y\ .$$

כאן $\widetilde{B}$ מטריצה $n\times n$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}y_1\\ \cdots\\ y_n\end{pmatrix}$ עמודות הקואורדינאטות של v,w

כך ש- $B(v,w)=x^t\widetilde{B}y=\begin{pmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix}(b_{ij})\begin{pmatrix}y_1\\ \cdots\\ y_n\end{pmatrix}=\sum_{i,j}x_ib_{ij}y_j$.

החלפת בסיס.

תהי עתה B תבנית דו-לינארית המיוצגת בבסיס $v_1,\ldots,v_n$ על-ידי מטריצה $\widetilde{B}$. מהי המטריצה המיצגת את B בבסיס חדש $w_1,\ldots,w_n$?

נניח כי $w_j=\sum_{i=1}^{n}c_{ij}v_i$ כך ש- $C=(c_{ij})$ היא מטריצת המעבר. אזי הרכיבים b'_{ij} המטריצה המיצגת החדשה $\widetilde{B}'$ ניתנים על-ידי הנוסחה

$$.b'_{ij} = B(w_i, w_j) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} c_{ki} b_{kl} c_{lj} = (C^t \widetilde{B} C)_{ij}$$

לבסוף, הוכחנו את הטענה הבאה:

משפט. אם תבנית דו-ילנארית מיוצגת על-ידי מטריצה $\widetilde{B}$ בבסיס $v_1,\ldots,v_n$,
אז בבסיס החדש $w_1,\ldots,w_n$ עם מטריצת מעבר C התבנית מיוצגת על-ידי
המטריצה $C^t \widetilde{B} C$.

3. תכונות טיפוסיות של תבניות דו-לינאריות.

הגדרה. התבנית $B: V \times V \to k$ נקראת סימטרית אם $B(v,w) = B(w,v)$ לכל $v, w \in V$.

הגדרה. התבנית $B: V \times V \to k$ נקראת אנטי-סימטרית אם $B(v,v) = 0$ לכל $v \in V$.

הגדרה. התבנית $B: V \times V \to k$ נקראת בלתי-מנוונת אם אחת משתי התכונות הבאות מתקיימת:

1. אם לכל $w \in V$ מתקיים $B(v,w) = 0$ אז $v = 0$.
2. אם לכל $w \in V$ מתקיים $B(w,v) = 0$ אז $v = 0$.

הסבר. נסביר מדוע התכונות 1 ו- 2 שקולות. אם התבנית מיוצגת על-ידי מטריצה $\widetilde{B}$, אז השוויון $B(v,w) = 0$ לכל w אומר כי $x^t \widetilde{B} = 0$. לכן התכונה 1 אומרת כי העמודות של $\widetilde{B}$ בתתי-תלויות ($x^t \widetilde{B} = 0$ גורר $x = 0$). באותו אופן, התכונה 2 אומרת כי השורות של $\widetilde{B}$ בלתי-תלויות ($\widetilde{B} y = 0$ גורר $y = 0$).
אך אנחנו יודעים שעבור מטריצה ריבועית תכונות אלו שקולות זו לזו.

הערה. שקילות של תכונות 1 ו- 2 ברורה במיוחד עבור תבניות סימטריות.