אופרטורים: צורת ז'ורדן - המשך .

1. וקטורים עצמיים מוכללים.

יהי λ ערך עצמי של אופרטור $f:V\to V$.

וקטור $v\in V$ נקרא <u>וקטור עצמי מוכלל</u> של ערך עצמי λ אם
קיים מספר טבעי N כך ש- $(f-\lambda\cdot I)^N v=0$.
כאן ,כרגיל, I מסמן אופרטור זהות $I(v)=v$.

אוסף כל הוקטורים העצמיים המוכללים של ערך עצמי λ נסמן V_λ .

למה. V_λ תת-מרחב וקטורי של V.
הוכחה. אם $x,y\in V_\lambda$ עלינו לוודא כי $cx, x+y\in V_\lambda$.
ואמנם, אם $(f-\lambda I)^N x=0$ וגם $(f-\lambda I)^M y=0$ נבחר מספר L גדול או שווא ל- M,N , ואז

$$(f-\lambda I)^L(x+y)=(f-\lambda I)^L x+(f-\lambda I)^L y=0.$$

הסגירות ביחס לכפל בסקלר עוד יותר פשוטה.

למה. V_λ תת-מרחב אינווריאנטי של V.
הוכחה. עלינו לוודא כי אם $x\in V_\lambda$ אז $f(x)\in V_\lambda$. ואמנם, אם $(f-\lambda I)^N x=0$ אזי $(f-\lambda I)^N f(x)=f\cdot(f-\lambda I)^N x=0$ – כי האופרטורים f ו- $(f-\lambda I)^N$ מתחלפים.

2. משפט. $\dim V_\lambda=d$ כאשר d ריבוי שורש λ של הפולינום האפייני של f .
הוכחה. נוח מאוד להגדיר אופרטור חדש $g=f-\lambda I$. לאופרטור g ערך עצמי 0 בעל ריבוי d , והמרחב V_λ הוא מרחב הוקטורים העצמיים המוכללים של g המתאימים לערך עצמי 0.
עתה נשתמש במשפט של סעיף 1: לפי משפט זה הריבוי של 0 באופרטור g שווה לסכום שני המספרים: הריבוי של 0 ב- $g|_{V_\lambda}$ והריבוי של 0 באופרטור $\bar{g}:V/V_\lambda\to V/V_\lambda$. הצמצום $g|_{V_\lambda}$ הוא אופרטור נילפוטנטי. לכן, כל הערכים העצמיים שלו שווים לאפס, ומספרם הוא $\dim V_\lambda$. נשאר לנו להוכיח כי לאופרטור $\bar{g}$ אין ערך עצמי 0 .
אך אילו היה, היה אפשר למצוא $v+V_\lambda\in V/V_\lambda$ כך ש- $\bar{g}(v+V_\lambda)=0$.
אך זה גורר $g(v)+V_\lambda=0+V_\lambda$ או $g(v)\in V_\lambda$.
משמעות הדבר כי קיים N מספר טבעי כך ש- $g^{N+1}(v)=g^N(g(v))=0$.
במלים אחרות, $v\in V_\lambda$ כך ש- $v+V_\lambda=0$.
סוף הוכחת המשפט.

3. משפט. יהי $f:V\to V$ אופרטור, כך שהפולינום האפייני שלו מתפרק:

$$P_f(t)=\prod_{i=1}^{m}(t-\lambda_i)^{d_i} \ .$$

יהיו $V_i=\left\{x\in V \mid \exists N:(f-\lambda_i I)^N x=0\right\}$. אזי $V=V_1\oplus\ldots\oplus V_m$.

הוכחת המשפט.

אנחנו כבר יודעים כי V_i תת-מרחב אינווריאנטיים ב- V בעלי מימד d_i.

נזכיר כי מרחב V נקרא סכום ישיר של תת-מרחב V_i אם שתי התכונות הבאות מתקיימות:

1. $x=\sum_{i=1}^{m}x_i \quad \forall x\in V\ \exists x_i\in V_i:$ (קיום הצגה)
2. אם $\sum_{i=1}^{m}x_i=\sum_{i=1}^{m}y_i$ עבור $x_i,y_i\in V_i$ אזי $x_i=y_i$ לכל i (יחידות ההצגה).

נזכיר כי התכונה 2 שקולה לתכונה הבאה

2א. אם $\sum_{i=1}^{m}x_i=0$ עבור $x_i\in V_i$ אזי $x_i=0$ לכל i .

נבדוק קודם כל כי $V_i\cap V_j=0$ עבור $i\neq j$. ואמנם, החיתוך $W=V_i\cap V_j$ הוא תת-מרחב אינווריאנטי. אם $0\neq x\in W$, נבחר N הקטן ביותר כך ש- $(f-\lambda_i I)^N x=0$. אזי $y=(f-\lambda_i)^{N-1}$ מקיים תכונות $0\neq y\in W$ וגם $(f-\lambda_i)y=0$. השוויון האחרון אומר כי $f(y)=\lambda_i y$. אבל אז $(f-\lambda_j)^N y=(\lambda_i-\lambda_j)^N y\neq 0$.

נוכיח עתה את התכונה 2א.

נניח, בדרך השלילה, כי קיים אוסף $x_i\in V_i$, שלא כולם שווים לאפס, כך ש- $\sum x_i=0$.

נבחר אוסף כזה בו מספר איברים x_i השונים מאפס הוא הקטן ביותר.

נניח $0\neq x_i$. אזי $x_i=-\sum_{j\neq i}x_j$. נבחר N כך ש- $(f-\lambda_i I)^N x_i=0$. אזי $\sum_{j\neq i}(f-\lambda_i)^N x_j=0$. כיוון שכל המרחבים V_j אינווריאנטיים, מתקיים $(f-\lambda_i)^N x_j\in V_j$ לכל $j\neq i$. זה אומר כי מצאנו הצגה יותר קצרה של אפס כסכום איברי V_j . לכן, לפי ההנחה

$(f-\lambda_i)^N x_j=0$ לכל j . זה מוכיח כי $x_j\in V_i\cap V_j=0$ ולכן גם $x_i=0$. סתירה.

נגדיר עתה תת-מרחב W ב- V ע"י הנוסחה

$$W=V_1+\ldots+V_m \ .$$

לכל איבר של W , לפי הגדרתו, קיימת הצגה בצורה $\sum_{i=1}^{m}x_i$ כאשר $x_i\in W$.

יחידות ההצגה הוכחה כבר קודם. לכן, $W=V_1\oplus\ldots\oplus V_m$.

זה גורר כי $\dim W=\sum\dim V_i=\sum d_i=\dim V$. לכן, בהכרח $W=V$.

סוף הוכחת המשפט.

4. נעצור לרגע וננסה להבין מה הבנו.

היה נתון לנו אופרטור $f:V\to V$ אם הפולינום האפייני $P_f(t)=\prod_{i=1}^{m}(t-\lambda_i)^{d_i}$.

הגדרנו תתי-מרחב אינווריאנטיים V_i של הוקטורים האפייניים המוכללים.
בדקנו כי $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$.

אם עכשיו נבחר בסיס בכל אחד מהמרחבים V_i , ונאחד את הבסיסים האלה, נקבל בסיס ל- V.
אם נסמן ב- A_i את המטריצה המיצגת של הצמצום $f|_{V_i}$, נקבל את המטריצה המיצגת של f
בצורת הבלוקים:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \\ 0 & A_2 & & \\ 0 & 0 & \ldots & \\ 0 & 0 & & A_m \end{pmatrix}.$$

לכן, בעית המיון של אופרטורים צומצמה לבעית המיון של אופרטורים מן הסוג המאוד ספציפי:
אופרטורים בעלי ערך עצמי אחד בלבד.

5. אפשר לפשט את הבעיה עוד קצת: אם $f: V \to V$ אופרטור בעל פולינום אפייני $P_f = (t-\lambda)^n$, אפשר להניח $g = f - \lambda I$ ואז $P_g(t) = t^n$, זאת אומרת, כי g אופרטור נילפוטנטי. אם נדע למיין אופרטורים נילפוטנטיים, זה יתן לנו מיון עבור f ,
כי הרי $f = g + \lambda I$.

לכן, נשאר לנו רק למיין אופרטורים נילפוטנטיים.

6. פולינום מינימלי.

תהי $A \in Mat_n(k)$. משפט קיילי-המילטון אומר כי $P_A(A) = 0$ כאשר P_A פולינום אפייני של A. פולינום זה לעולם לא שווה לאפס: הוא בעל דרגה n והמקדם הראשי שווה ל- 1.

נחפש בין הפולינומים המאפסים את A – אחד שדרגתו הקטנה ביותר.
הגדרה. פולינום $f(t) \in k[t]$ נקרא <u>פולינום מינימלי</u> של מטריצה A **אם:**

- $f(A) = 0$
- $\deg(f) \le \deg(g)$ לכל פולינום $g \ne 0$ המאפס את A **.**
- המקדם הראשי של f שווה ל-1.

משפט.

1. פולינום מינימלי קיים ויחיד עבור כל מטריצה A .
2. אם f פולינום מינימלי עבור A ואם $g(A) = 0$ אז g מתחלק ב- f .

הוכחה.
קודם כל נוכיח קיום פולינום מינימלי. זה כמעט מיידי: $P_A(A) = 0$ לכן, קיימים פולינומים השונים מאפס, ומאפסים את A . נבחר פולינום שדרגתו הקטנה ביותר. נחלק אותו במקדמו הראשי. זה יתן לנו פולינום המקיים את כל שלושת התנאים.

נוכיח עתה את החלק השני של המשפט.
נחלק פולינום $g(t)$ בפולינום $f(t)$ עם שארית:

$$g(t)=f(t)h(t)+r(t)$$

כאן $r(t)$ השארית ואם $r\neq 0$, דרגתו קטנה מדרגת f .

נוכיח כי $r=0$. כי $r(t)=g(t)-f(t)h(t)$ כך ש- $r(A)=g(A)-f(A)h(A)=0$.

כיוון שבחרנו f כפולינום בעל דרגה מינימלית בין אלה (שונים מאפס) המאפסים את A , מסיקים כי $r=0$.

נשלים הוכחת היחידות. אם f, f' מינימליים, לפי סעיף 2 $f'=fh$ עבור פולינום h מסוים. שניהם, f ו- f' בעלי אותה דרגה, לכן h בעל דרגת אפס, זאת אומרת, h קבוע. כיוון שלשניהם המקדם הראשי שווה ל-1 , $h=1$.

זה סוף ההוכחה.

אנחנו נסמן פולינום מינימלי של A ע"י m_A .

לפי המשפט שהוכחנו, P_A מתחלק ב- m_A .

דוגמאות ותכונות.

1. $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. הפולינום האפייני הוא $P_A=t^2$. לכן, m_A חיזקה של t .
   כיוון ש- t לא מאפס את A , $m_A=t^2$.

2. אם $A'=C^{-1}AC$ אז $m_A=m_{A'}$. ואמנם, לכל פולינום f מתקיים $f(A')=C^{-1}f(A)C$,
   כך ש- $f(A)=0$ אם ורק אם $f(A')=0$.

3. אם $A=\begin{pmatrix}A_1&0&0&\\0&A_2&&\\0&0&\dots&\\0&0&&A_m\end{pmatrix}$ צטריצת בלוקים, אז $f(A)=0$ אם ורק אם $f(A_i)=0$
   לכל $i=1,\dots,m$.

4. אם $f:V\to V$ אופרטור, נגדיר m_f כפולינום המינימלי של כל מטריצה מיצגת שלו.
   לפי תכונה 2 m_f לא תלוי בבחירת הבסיס. עתה יהי $P_f(t)=\prod_{i=1}^{m}(t-\lambda_i)^{d_i}$.
   נבחר בסיס בכל אחד מהמרחבים V_i של וקטורים עצמיים מוכללים המתאימים לעצמי
   λ_i . אנו יודעים כי $P_{A_i}=(t-\lambda_i)^{d_i}$. הפולינום המינימלי m_{A_i} מחלק את
   $P_{A_i}=(t-\lambda_i)^{d_i}$. לכן, $m_{A_i}=(t-\lambda_i)^{k_i}$ כאשר $1\le k_i\le d_i$.
   לכן $m_A=\prod_{i=1}^{m}(t-\lambda_i)^{k_i}$ כאשר $1\le k_i\le d_i$.
   אפשר לסכם את מסקנותינו כך:
   P_f ו- m_f בעלי אותם שורשים אלא שריבוי שלהם ב- m_f קטן או שווה לריבוי ב- P_f.

שוב V מרחב וקטורי בעל מימד n , $f:V\to V$ אופרטור בעל פולינום אפייני $P_f(t)$.

נזכיר כי אנחנו מניחים כי הפולינום האפייני מתפרק $P_f(t)=\prod_{i=1}^{k}(t-\lambda_i)^{d_i}$ כאשר λ_i ערכים עצמיים <u>שונים</u> והמספרים d_i הם ריבויים שלהם.
ברור כי $n=\sum_{i=1}^{k}d_i$.

עבור כל ערך עצמי λ של f הגדרנו מרחב הוקטורים העצמיים המוכללים $V_\lambda=\{v\in V\mid \exists N:(f-\lambda I)^N v=0\}$.
הוכחנו כי $\dim V_{\lambda_i}=d_i$ וכי $V=V_{\lambda_1}\oplus\ldots\oplus V_{\lambda_k}$. זה אומר כי אם נבחר בסיס בכל אחד מן המרחבים V_{λ_i} ונאחד אותם, נקבל בסיס ל- V, וכי המטריצה המיצגת של f בבסיס זה תיראה
כך:

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & A_2 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & A_k\end{pmatrix}$$

כאשר A_i המטריצה המיצגת את הצמצום של f על תת-המרחב האינווריאנטי V_{λ_i}.
מטריצה A_i מתאימה לערך עצמי λ_i. לכן המטריצה $B_i=A_i-\lambda_i I$ מתאימה לערך עצמי 0.
לפי משפט קיילי-המילטון, B_i נלפוטנטית. לפי סעיף 9, קיים בסיס ב- V_{λ_i} בו B_i מיוצגת ע"י מטריצה מהצורה

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & J_2 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & J_m\end{pmatrix}$$

כאשר כל J_i הוא <u>תא ז'ורדן נילפוטנטי</u>. באותו בסיס המטריצה A_i תהיה גם כן למטריצת התאים
שכל תא בה מהצורה

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_i & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_i & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i\end{pmatrix}.$$

מטריצה כזאת נקראת <u>תא ז'ורדן</u>.

כל זה מוכיח את המשפט:

משפט. יהי $f:V\to V$ אופרטור כך ש- $P_f(t)=\prod_{i=1}^{k}(t-\lambda_i)^{d_i}$. אזי קיים בסיס ב- V שהמטריצה המיצגת את f תהיה בצורת ז'ורדן.
המשפט האחרון משמעותו כי המטריצה המיצגת היא מטריצת בלוקים, כך שכל בלוק הוא תא של ז'ורדן.

7. שימושים: משוואות פולינומיאליות עם מטריצות.

נזכיר כי אם f פולינום ואם A,C מטריצות כך ש- C הפיכה, אז $f(C^{-1}AC)=C^{-1}f(A)C$.

– כדי להוכיח טענה זו עבור פולינום כללי f , בודקים אותה עבור $f(t)=1,t,t^2,\dots$, ואז מציגים פולינום כללי כצירוף לינארי של החזקות t^i .

בעובדה זו אפשר להשתמש כשצריך לפתור משוואה מטריציונית $f(A)=0$:
לפי מה שנאמר קודם, $f(A)=0$ אם ורק אם $f(C^{-1}AC)=0$.
כיוון שכל מטריצה דומה למטריצה בצורת ז'ורדן, מספיק למצוא את כל צורות ז'ורדן המקיימות את המשוואה.

הלאה, אם A מטריצת הבלוקים $A_1,\dots,A_k$, $f(A)$ היא מטריצת הבלוקים $f(A_1),\dots,f(A_k)$.
לכן, מספיק לבדוק קיום משוואה $f(A)=0$ על תאי ז'ורדן בלבד.

לבסוף, כיוון שהפולינום המינימלי של תא ז'רדן בעל גודל $d\times d$ וערך עצמי λ הוא $m(t)=(t-\lambda)^d$ הפולינום f מאפס תא ז'ורדן כזה אם ורק אם הוא מתחלק ב- m (זאת אומרת, אם יש לו שורש λ עם ריבוי $d \le$).

דוגמה. מצא כל ה מטריצות $A\in Mat_k(C)$ המקיימות את התכונה $A^n=1$.
הפולינום $f(t)=t^n-1$ מתפרק $f(t)=\prod_{j=0}^{n-1}(t-e^{\frac{2\pi j}{n}})$ כך שכל השורשים פשוטים (אין ריבוי).
זה אומר כי בצורת ז'ורדן של A כל תאי ז'ורדן הם 1×1 , כך ש- A ניתנת לליכסון.
הפתרון הכללי:

$$A=C^{-1}BC$$

כאשר B מטריצה אלכסונית עם מספרים מתוך הקבוצה $\left\{e^{\frac{2\pi j}{n}},\ j=0,\dots,n-1\right\}$ של פתרונות המשוואה $x^n=1$.

דוגמה. מצא מטריצות המקיימות $A^2=A$.
כיוון ש- $t^2-t=t(t-1)$, הפתרון הוא $A=C^{-1}BC$ כאשר B מטריצה אלכסונית עם המספרים מתוך $\{0,1\}$ באלכסון.

8. שימושים: חישוב של $\exp(A)$.

נזכיר כי $\exp(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}$. חישוב של הפונקציה המעריכית של מטריצה חשוב מאוד במשוואות דיפרנציאליות: אם $\dot{x}=Ax$ מערכת משוואות דיפרנציאליות לינאריות כאשר x פונקצית וקטור ו- A מטריצה, אז הפתרון הכללי הוא $x(t)=\exp(At)x(0)$.

למרות ש- $\exp$ לא פולינום, עדין $\exp(C^{-1}AC)=C^{-1}\exp(A)C$. לכן, מספיק לדעת לחשב $\exp(A)$ כאשר $A=\lambda I+N$ תא ז'ורדן.

כאן חשוב לדעת כי אם המטריצות X,Y מתחלפות (אצלנו $X=\lambda I,\quad Y=N$), אזי $\exp(X+Y)=\exp(X)\exp(Y)$. ואמנם, ההוכחה הרגילה של עובדה זו בחדו"א א' עובדת גם פה:

$$\exp(X+Y)=\sum\frac{(X+Y)^n}{n!}=\sum_{p,q:p+q=n}\frac{\binom{p+q}{p}X^pY^q}{(p+q)!}=\sum_{p,q}\frac{X^p}{p!}\frac{Y^q}{q!}=\exp(X)\exp(Y)$$

לכן, $\exp(\lambda I+N)=\exp(\lambda I)\exp(N)=\exp(\lambda)I\exp(N)=\exp(\lambda)\exp(N)$.
נשאר לחשב

$$\exp(N)=\begin{pmatrix}1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}\\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-2)!}\\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{(n-3)!}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

9. שימושים: נוסחאות נסיגה.

מאז "דה-וינצ' קוד" של דן בראון כל אחד יודע מה היא משוואת נסיגה:

$$x_i=a_1x_{i-1}+\ldots+a_nx_{i-n}\ .$$

נוסחה כזו מגדירה סידרת מספרים $x_1,x_2,\ldots$ ככל שידועים ערכים של n איברי הסדרה הראשוניים.

בקורס של מתמטיקה בדידה למדתם איך למצוא פתרון כללי של משוואת הנסיגה: יש לחפש את הפתרון בצורה $x_i=\lambda^i$, זה נותן משוואה פולינומיאלית ממעלה n על λ (משוואה אפיינית) ואם למשוואה אין ריבוי שורשים, זה מביא ל-n פתרונות $x_i=\lambda_j^i,\ j=1,\ldots,n$, ואז הפתרון הכללי הוא צירוף לינארי של פתרונות אלה.

מה יש לנו להוסיף בנידון?

אוסף פתרונות של משוואת הנסיגה הוא מרחב וקטורי בעל מימד n – כי כל פתרון מוגדר באופן יחיד ע"י הערכים ההתחלתיים $x_1,\ldots,x_n$. כך, נבחר בתור בסיס לאוסף פתרונות Sol את האוסף $e^1,\ldots,e^n$ שהערכים הראשוניים שלהם ניתנים ע"י הנוסחה $e_j^i=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$.

מרחב הפתרונות Sol מצויד באופרטור "הזזה" $f:Sol\to Sol$ המוגדר ע"י

$$f(x_1,x_2,x_3,\ldots)=(x_2,x_3,x_4,\ldots)\ .$$

בבסיס שבחרנו הוא נראה כדלקמן:

$$f(e^1)=(0,0,\ldots,a_n)=a_ne^n$$
$$f(e^2)=(1,0,\ldots,a_{n-1})=e^1+a_{n-1}e^n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(e^n)=(0,0,\ldots,1,a_1)=e^{n-1}+a_1e^n$$

המטריצה של f בבסיס זה היא

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ a_n & a_{n-1} & & & a_1 \end{pmatrix}$$

הפולינום האפייני של A הוא $\det(tI-A)$. ניתן לחשב אותו ע"י פיתוח לפי השורה האחרונה.
מקבלים

$$P_A(t)=t^n-a_1t^{n-1}-\ldots-a_{n-1}t-a_n\,.$$

זה בדיוק הפולינום האפייני של משוואת הנסיגה!
הוקטור העצמי המתאים לערך עצמי λ הוא בוודאי סדרת החזקות של λ. זה אומר כי בכל מקרה לכל ערך עצמי λ קיים תא ז'ורדן יחיד עם ערך עצמי זה. אולם זה לא אומר כי ריבוי שורשים כאן בלתי-אפשרי – כל פולינום יכול לשמש כפולינום אפייני של משוואת נסיגה.

עכשיו אנחנו יכולים לקבל פתרון כללי של משוואת נסיגה במקרה של ריבוי שורשים.
יהי λ שורש של הפולינום האפייני בעל ריבוי d. אנחנו כבר הבנו כי צורת ז'ורדן של מטריצה A מכילה תא ז'ורדן $d\times d$ בעל ערך עצמי λ. זה נותן d וקטורי בסיס $v^1,\ldots,v^d$ המקיימים $f(v^1)=\lambda v^1$ ו- $f(v^i)=\lambda v^i+v^{i-1}$ עבור $1<i$.
המשוואה הראשונה נותנת מיד $v_m^1=\lambda^m$, ועם מאמץ מסוים אפשר לקבל $v_m^2=m\lambda^{m-1}$, ובאופן כללי $v_m^k=\binom{m}{k-1}\lambda^{m-k+1}$ כאשר (לאלה שהעזו לשכוח) $\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!(m-n)!}$.

במקרה של משוואת נסיגה נהוג לבחור בסיס אחר ולא בסיס ז'ורדן שתיארנו זה עתה.
ניקח בחשבון כי $\binom{m}{k-1}=\frac{m(m-1)\cdots(m-k+2)}{(k-1)!}$ הוא פולינום ב- m בעל מעלה $k-1$.
לכן אוסף וקטורים ב- V מהצורה $w_m^k=m^{k-1}\lambda^m$ כאשר $k=1,\ldots,d$ גם כן מהווה בסיס למרחב הוקטורים העצמיים המוכללים של ערך עצמי λ.