אופרטורים: צורת ז'ורדן (Jordan) .

1. אופרטורים נילפוטנטיים.

קודם כל הערה. אם A מטריצה נילפוטנטית, כל הערכים העצמיים שלה שווים לאפס.
הנה ההוכחה (אנחנו מניחים בהוכחה כי השדה שלנו סגור אלגברית. אם לא – צריך שיקול נוסף: לשכן את השדה אל תוך שדה סגור אלגברית
ולהוכיח שבשדה החדש אין ערכים עצמיים שונים מאפס).
ובכן, אם λ ערך עצמי ואם v וקטור עצמי המתאים ל- λ, $Av = \lambda v$, לכן $A^N v = \lambda^N v = 0$,
לכן $\lambda = 0$.

לכן, אילו היתה מיוצגת על-ידי מטריצה אלכסונית בבסיס מסוים, זאת היתה מטריצת האפס.
זה אומר כי אין לנו סיכוי למצוא צורה אלכסונית למטריצה נילפוטנטית.

לפי משפט Cayley-Hamilton, גם ההפךהוא נכון: אם לאופרטור כל הערכים העצמיים שווים לאפס, או במלים אחרות, אם הפולינום
האפייני של האופרטור הוא $p_f(t) = t^n$, כאשר n הוא מימד של המרחב הווקטורי (גודל המטריצה המיצגת), אז לפי קיילי-המילטון, $f^n = 0$,
זאת אומרת, f נילפוטנטי עם דרגת הנילפוטנטיות $\leq n$.

דוגמה. $V = k[x]_{\leq n-1}$ **-** מרחב הפולינומים בעלי דרגה $\leq n-1$.
יהי $f(F) = F'$ – אופרטור הגזירה. נניח כי השדה מכיל את המספרים הרציונליים.
אזי בבסיס $\{1, x, \frac{x^2}{2}, \dots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\}$ האופרטור מיוצג ע"י המטריצה

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(כאן $n = 4$).

מטרתנו תהיה להוכיח כי כל מטריצה נילפוטנטית דומה למטריצה הבנויה מהבלוקים כמו שבדוגמה.

עתה נוכיח את המשפט.

משפט. יהי $f : V \to V$ אופרטור נילפוטיטי על מרחב וקטורי V (כרגיל, $\dim V < \infty$).
אזי קיים בסיס ב- V בו f מיוצג על-ידי מטריצה מהצורה

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & A_m \end{pmatrix}$$

כאשר כל A_i תא ז'ורדן נילפוטנטי, זאת אומרת, מהצורה

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & 1 \\ 0 & 0 & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

לפני שנתחיל להוכיח את המשפט, ניתן מספר הגדרות שנוח יהיה לעבוד איתן.

הגדרה. יהי V מרחב וקטורי ויהי $f: V \to V$ אופרטור נילפוטנטי.
בסיס $\{v_i\}$ של V ייקרא <u>מתואם עם f</u> אם

- $f(v_i)$ הוא איבר בסיס או אפס.
- אם $f(v_i) = f(v_j) \neq 0$ אזי $i = j$.

אם נציג איברי בסיס מתואם על-ידי קדקודים של גרף, ונסמן בעזרת חצים לאן מעביר אופרטור f כל קדקוד, נקבל גרף בנוי משרשרות כמו באיור:

$$v_k \to v_{k-1} \to \cdots \to v_1$$

ואופרטור f המתואר על-ידי שרשרת כזו, מיוצג על-ידי מטריצה שראינו מעלה – תא ז'ורדן נילפוטנטי בגודל k.

לכן, המשפט שעלינו להוכיח פשוט טוען כי לכל אופרטור נילפוטנטי f על מרחב וקטורי V קיים בסיס של V המתואם עם f .

לפני שנתחיל את ההוכחה, אנחנו צריכים מושג חדש של בסיס ביחס לתת-מרחב.

הגדרה. יהי V מרחב וקטורי, $W \subseteq V$ תת-מרחב. הוקטורים $v_1, v_2, \cdots, v_k$ <u>מהווים קבוצה בלתי-תלויה מודולו W</u>
אם למשוואה $c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k + w = 0$, כאשר $c_i \in F, w \in W$, פתרון יחיד $c_i = 0, w = 0$.

הגדרה. יהי V מרחב וקטורי, $W \subseteq V$ תת-מרחב. הוקטורים $v_1, v_2, \cdots, v_k$ <u>מהווים בסיס של V מודולו W</u>
אם כל וקטור $v \in V$ ניתן להציג באופן יחיד בצורה $v = c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k + w$, כאשר $c_i \in F, w \in W$.

כדי למצוא בבסיס של V מודולו W, מספיק למצוא בסיס ב-W ולהרחיב אותו לבסיס ב-V .
איברים שהוספנו תוך כדיהרחבת הבסיס, הם מהווים בסיס של V מודולו W.
אנחנו נחזור למושג זה קצת יותר מאוחר, כאשר נדבר על מרחבי מנה.

הגדרה. יהי V מרחב וקטורי ויהי $f: V \to V$ אופרטור נילפוטנטי. לכל $k \geq 0$ שלם נגדיר
$$V_k = \{v \in V | f^k(v) = 0\}$$
דרגת הנילפוטנטיות של f היא המספר N הקטן ביותר כך שמתקיים $V = V_N$.

ברור כי $V_0 = 0$ וכי $V = V_N \supseteq V_{N-1} \supseteq \cdots \supseteq V_1$.

הוכחת המשפט. אנחנו מתכוונים להוכיח את המשפט באינדוקציה לפי דרגת הנילפוטנטיות

של f. כדי לעשות זאת, נאלץ לנסח את המשפט כך שנוכל לעשות מעבר מדרגת הנילפוטנטיות $N-1$ לדרגת הנילפוטנטיות N . הנה הניסוח הנוח להוכחה:

משפט. תהי $\{w_1, \cdots, w_k\}$ קבוצת וקטורים ב- V בלתי-תלויה מודולו V_{N-1}.
אזי ניתן להשלים קבוצה זו לבסיס של V מתואם עם f .

את המשפט הזה נוכיח באינדוקציה לפי דרגת הנילפוטנטיות N של האופרטור.
אם $N=1$, $f=0$, ואז את קבוצת הוקטורים הנתונה יש פשוט להשלים לבסיס ל- V.
כיוון של כל בסיס מתואם עם $f=0$ אין מה להוכיח במקרה זה .

נניח כי הטענה נכונה עבור דרגות הנילפוטנטיות קטנות מ- N.
עתה נתונים לנו איברים $\{w_1, \cdots, w_k\}$ כמו בניסוח המשפט.
נגדיר איברים חדשים

$$v_1 = f(w_1), \cdots, v_k = f(w_k).$$

איברים אלה שייכים ל-V_{N-1}. בואו נבדוק כי הם בלתי-תלויים וכי המרחב הנפרש על-ידיהם יש לו חיתוך אפס עם V_{N-2}. ואמנם, אם

$$w = \sum_{i=1}^{k} c_i v_i$$

שייך ל- V_{N-2} , מתקיים

$$f^{N-1}\left(\sum c_i w_i\right) = f^{N-2}\left(\sum c_i f(w_i)\right) = f^{N-2}(w) = 0,$$

כך ש- $\sum c_i w_i \in V_{N-1}$ שגורר לפי הנתון $c_i = 0$.

עתה אנחנו כמעט מוכנים לעשות צעד אינדוקטיבי: יש לנו קבוצה של וקטורים בלתי-תלויים $v_1, \cdots, v_k$ ב- V_{N-1} כך שלמרחב $Span\{v_1, \cdots, v_k\}$ אין חיתוך עם V_{N-2} . אנחנו יכולים להשלים את קבוצה זו של הוקטורים לקבוצה

$$\{v_1, \cdots, v_l\}$$

(כאן $l \geq k$) כך שיתקיים

$$V_{N-1} = Span\{v_1, \cdots, v_l\} \oplus V_{N-2}.$$

לפי הנחת האינדוקציה, ניתן להשלים קבוצת וקטורים זו לבסיס של V_{N-1} מתואם עם f.
בסיס זה, יחד עם הוקטורים $\{w_1, \cdots, w_k\}$ שאיתם התחלנו, נותנים בסיס מתואם של V.
זהו סוף ההוכחה.

2. יחידות צורת ז'ורדן עבור מטריצות נילפוטינטיות.

בסעיף 1 הוכחנו כי כל אופרטור נילפוטנטי מיוצג על-ידי מטריצה הבנויה מתאי ז'ורדן נילפוטנטיים.
כל תא מתואר על-ידי גודלו. לכן, כל מטריצה הבנויה מתאי ז'ורדן מוגדרת על-ידי סדרת הגדלים של תאי ז'ורדן שלה.

ברור כי סדר התאים לא משחק תפקיד פה: החלפת סדר התאים תתבטא בהחלפת סדר של איברי
הבסיס, כך שמטריצות הבנויות מאותם תאים אך בסדר שונה, דומות זו לזו.

אולם, אם נקבע סדר של תאים, למשל, על-ידי כך שנדרוש כי גודל התאים הולך וקטן:

$$d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_k,$$

אז צורת ז'ורדן של מטריצה נילפוטנטית תהיה יחידה:

משפט. יהיו A, A' שתי מטריצות נילפוטנטיות בצורת ז'ורדן, כך ש-A בנויה מהתאים שגודלם $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_k$ ואילו A' בנויה מהתאים שגודלם $d_1' \geq d_2' \geq \ldots \geq d_l'$. אזי, אם A ו- A' דומות, מתקבל כי $k = l$ וגם $d_i' = d_i$ לכל i.

הוכחת המשפט.

אנחנו נחזור לציור המתאר את איברי הבסיס:

$$\begin{array}{l} \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \ldots \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \\ \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \ldots \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \\ \bullet \leftarrow \ldots \leftarrow \bullet \end{array}$$

מקבלים טבלה (לא ריבועית) שיש בה k שורות. אנו נתאר תהליך המאפשר לשחזר את מספרי הקדקודים בכל שורה ($d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_k$) על סמך האופרטור f המיוצג על-ידי המטריצות A, A'. זה, בוודאי, יוכיח את המשפט.

במקום לנסות ולבטא ישירות מספר קדקודים בכל שורה, אנחנו נסביר איך לצייר את הטבלה לפי עמודות. נתחיל מהעמודה הראשונה.

מספר קדקודים בעמודה הראשונה הוא $\dim Ker(f)$, כי קדקודים אלה מהווים בסיס של הגרעין.

הלאה, מספר קדקודים בשתי העמודות הראשונות הוא $\dim Ker(f^2)$.

באופן כללי, מספר הקדקודים ב-i העמודות הראשונות (מצד שמאל) הוא $\dim Ker(f^i)$.

משמעות של מה שנאמר: כיוון ששתי המטריצות, A ו- A', מיצגות את אותו אופרטור f, מספר הקדקודים בשתי צורות ז'ורדן ב- i עמודות הראשונות עבור A ועבור A' זהה.

לכן, ל-A ול- A' אותה צורת ז'ורדן.

3. אופרטורים בעלי ערך עצמי אחד בלבד.

אפרטורים נילפוטנטיים הם בדיוק אלה בעלי פולינום אפייני $p(t) = t^n$. בסעיף זה אנחנו קצת נכליל את התוצאה של הסעיפים הקודמים.

נניח כי לאופרטור $f: V \to V$ הפולינום האפייני הוא $p_f(t) = (t - \lambda)^n$. אנחנו נגדיר אופרטור חדש על-ידי הנוסחה

$$g = f - \lambda \cdot id.$$

נחשב את הפולינום האפייני כדי לוודא כי g נילפוטנטי:

$$p_g(t) = det(t \cdot id - g) = \det\big((t + \lambda) \cdot id - f\big) = p_f(t + \lambda) = t^n.$$

לפי משפט על קיום ויחידות של צורת ז'ורדן עבור אופרטור נילפוטנטי, קיים בסיס בו g מיוצג על-ידי מטריצת תאים, בה כל תא

הוא תא ז'ורדן נילפוטנתי. זה מיד גורר כי באותו בסיס האופרטור f מיצג על-ידי מטריצת תאים, בה כל תא הוא תא ז'ורדן בעל ערך עצמי λ.

הנה איך נראה תא ז'ורדן כזה.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

4. סיכום: צורת ז'ורדן עבור מטריצה כללית.

עכשיו אנחנו מוכנים להבין את הניסוח של המשפט הכללי.

משפט. יהי $f: V \to V$ אופרטור על מרחב וקטורי בעל מימד סופי. נניח כי הפולינום האפייני של f מתפרק לחלוטין (זאת אומרת, יש לו את כל השורשים, למשל, השדה סגור אלגברית). אזי קיים בסיס בו האופרטור מיוצג על-ידי מטריצת תאים, עם כל תא – תא ז'ורדן.

את המשפט נוכיח בהמשך.

5. תכנית עבודה.

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה k ויהי $f: V \to V$ אופרטור לינארי.
נניח כי הפולינום האפייני של f <u>מתפרק לחלוטין</u>. זה אומר כי

$$P_f(t) = (t-\lambda_1)^{d_1} \cdots (t-\lambda_m)^{d_m}$$

כאשר $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – ערכים עצמיים <u>שונים</u> של f ואילו d_i ריבוי של השורש λ_i.
<u>הערה.</u> פריקות מוחלטת של P_f היא תנאי לקיום של צורת ז'ורדן שאותה נלמד בפרק זה. היא תמיד מתקיימת אם השדה k סגור אלגברית.

בסעיף 3 של פרק זה אנחנו נתאים לכל ערך עצמי λ של f תת-מרחב אינווריאנטי V_λ – תת-מרחב של וקטורים עצמיים מוכללים.

אנחנו נוכיח כי $\dim V_{\lambda_i} = d_i$ וגם כי $V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_m}$ (נבדוק מימדים:
$n = d_1 + \ldots + d_m$ – הכל מתאום – עוד לא טעינו!)

מזה אנחנו נסיק כי אם נבחר בסיסים בכל אחד מהמרחבים V_{λ_i}, אז איחודם של בסיסים אלה יתן לנו בסיס של המרחב V. המטרימה המיצגת של f בבסיס זה תיראה כמטריצת בלוקים:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \\ 0 & A_2 & & \\ 0 & 0 & \ldots & \\ 0 & 0 & & A_m \end{pmatrix}$$

כך ש- A_i מטריצה של הצמצום של f על V_{λ_i}. עכשיו נשאר לנו להבין מה היא צורה קנונית של מטריצה המיצגת אופרטור בעל ערך עצמי אחד בלבד.
את האופרטורים בעלי ערך עצמי אחד בלבד אנו נחקור יותר מאוחר.