אופרטורים: ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים

1. מבוא.

חלק א' של הקורס הוקדש למרחבים וקטוריים ולהעתקות לינאריות.
יהי k שדה שישאר קבוע למשך סעיף זה.

אחד הדברים החשובים שלמדנו בחלק א' הוא המשפט האומר כי כל מרחב וקטורי בעל מימד n איזומורפי ל- k^n (אוסף עמודות באורך n).
משפט זה מתאר כל מרחבים וקטוריים בעלי מימד סופי <u>עד כדי איזומורפיזם</u>.

בעיה אחרת שפתרנו בחלק א' של הקורס היא מיון של העתקות לינאריות.
תהי $f: V \to W$ העתקה לינארית ממרחב V בעל מימד n למרחב W בעל מימד m .
אחד המשפטים שהוכחנו בחלק א' של הקורס אומר:

ניתן למצוא בסיס $v_1,\ldots,v_n$ ב- V ובסיס $w_1,\ldots,w_m$ ב- W כך שההעתקה f מוגדרת על-ידי
הנוסחאות:

$$f(v_i) = \begin{cases} w_i, & i \le k \\ 0, & i > k. \end{cases}$$

כאן מספר k הוא הדרגה של f (שהיא מוגדרת כ- $\dim \mathrm{Im}(f)$ או $n - \dim Ker(f)$).
במלים אחרות, המשפט אומר כי אפשר למצוא בסיסים ב- V וב- W כך שהמטריצה המיצגת של f תיראה כך:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\ldots 0 \\ 0 & 1 & 0\ldots 0 \\ 0 & 0 & 1\ldots 0 \\ 0 & 0 & 0\ldots 0 \end{pmatrix}$$

(ב- k מקומות הראשונים של האלכסון - 1 ; בשאר מקומות המטריצה - 0).

משפט זה גם כן ניתן לפרש כמשפט מיון של העתקות לינאריות: העתקה לינארית f מוגדרת
באופן יחיד עד כדי איזומורפיזם על-ידי שלושה מספרים:
$n = \dim(V)$, $m = \dim(W)$, $k = rk(f)$.

כדי להבין טוב יותר את משמעות המשפט, ננסח אותו בשפה של מטריצות.
כאן נתונה לנו מטריצה $A \in Mat_{m,n}(k)$. אם C מטריצה שעמודותיה איברי בסיס חדש ב- V,
ואילו D מטריצה שעמודותיה איברי בסיס חדש ב- W, אחרי המעבר לבסיסים החדשים נקבל מטריצה $A' = D^{-1}AC$ (ראה הרצאה 13 של חלק א'). לכן המשפט שאנו דנים בו אומר
כי לכל מטריצה $A \in Mat_{m,n}(k)$ קיימות מטריצות הפיכות $C \in Mat_n(k), D \in Mat_m(k)$,
כך שהמכפלה $D^{-1}AC$ היא מהצורה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\ldots 0 \\ 0 & 1 & 0\ldots 0 \\ 0 & 0 & 1\ldots 0 \\ 0 & 0 & 0\ldots 0 \end{pmatrix}.$$

אפשר גם לומר כי הצורה הזאת היא <u>הצורה הקנונית של העתקה לינארית.</u>

עתה אנו מתחילים לחקור מקרה של העתקה לינארית $f:V\to V$ ממרחב V <u>לעצמו</u>.

2. מה זה מיון אופרטורים?

אופרטור לינארי הוא העתקה לינארית $f:V\to V$ ממרחב V לעצמו.
הגדרה. אופרטור $f:V\to V$ <u>איזומורפי</u> לאופרטור $g:W\to W$ אם קיים איזומורפיזם $\alpha:V\to W$ כך שמתקיים

$$g(\alpha(x))=\alpha(f(x))$$

לכל $x\in V$. במילים אחרות: $g\circ\alpha=\alpha\circ f$ **או אפילו** $f=\alpha^{-1}\circ g\circ\alpha$.

מטרת המיון: לתאר את כל האופרטורים עד כדי איזומורפיזם.
בשפה של מטריצות:
הגדרה. שתי מטריצות A,A' נקראות <u>דומות</u> אם קיימת מטריצה הפיכה C כך ש-:
$A'=C^{-1}AC$ (כדאי להשוות את זה הן עם מה שנאמר בסעיף 1 והן מושג שקילות באופרטורים).

מטרת המיון: לתאר את כל המטריצות עד כדי דמיון.

מיון המטריצות עד כדי דימיון יעשה ע"י כך שאנו נגדיר אוסף מיוחד של מטריצות (מטריצות בצורת ז'ורדן (Jordan)) ונוכיח כי כל מטריצה דומה למטריצה בצורת ז'ורדן.
מיון זה תקף רק עבור שדות סגורים אלגברית (אנו נזכיר מושג זה בהמשך).
צורת ז'ורדן של מטריצה כמעט יחידה – עד כדי החלפת תאים (תאי ז'ורדן) בה.

עוד ניסוח שקול של אותו המשפט:

יהי $f:V\to V$ אופרטור לינארי מעל שדה סגור אלגברית. קיים בסיס ב- V עבורו המטריצה המייצגת של f היא בצורת ז'ורדן.

אנו נתחיל ממקרה פרטי $\dim V=2$ שבו כבר נבחין כמה תופעות חשובות.

3. פתרון הבעיה במימד 2.

ובכן, $\dim V=2$, $f:V\to V$ אופרטור.
<u>רעיון ראשון</u>.
נחפש וקטור $0\neq v\in V$ כך ש- $f(v)=\lambda v$ עבור מספר $\lambda\in k$ מסויום.
הגדרה. וקטור v כזה נקרא וקטור עצמי, ו- λ נקרא ערך עצמי של v .
למה זה טוב? כי אם נצליח למצוא ב- V בסיס של וקטורים עצמיים, אז המטריצה שתיצג את f תהיה אלכסונית.

משוואה $f(v)=\lambda v$ היא מערכת משוואות הומוגניות; יש לה פתרון לא טריוויאלי אם ורק אם האופרטור $f-\lambda\cdot id$ לא הפיך.

נחפש כל λ כך ש- $f-\lambda\cdot id$ לא הפיך.

אם f מיוצג בבסיס מסוים ע"י מטריצה $A=\begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix}$ אז $f-\lambda\cdot id$ ייוצג ע"י מטריצה $A-\lambda I=\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$. מטריצה זו לא הפיכה אם ורק אם דטרמיננטה שלה שווה לאפס:

$$\det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}=0.$$

במילים אחרות, ערכים עצמיים של f הם שורשים של הפולינום:

$$\lambda^2-(a+c)\lambda+(ad-bc).$$

פולינום זה נקרא <u>פולינום אפייני של</u> f (או של מטריצה A).

<u>תופעה ראשונה</u>. למשוואה ריבועית לא תמיד יש פתרונות. למשל, אם $k=R$ (שדה הממשיים),

למשוואה $\lambda^2+1=0$ אין פתרונות. לכן, בעית המיון הרבה יותר פשוטה כאשר אנחנו עובדים עם שדה המרוכבים.

נניח מעתה בסעיף זה כי $k=C$. יהיו λ_1,λ_2 שני השורשים של הפולינום האפייני.

<u>תופעה שניה</u>. יש להבדיל בין שני מקרים: שורשים שונים ושורשים נלכדים.

<u>מקרה יותר פשוט</u>: $\lambda_1\neq\lambda_2$.

קיים וקטור $v_1\neq 0$ כך ש- $f(v_1)=\lambda_1 v_1$.

קיים וקטור $v_2\neq 0$ כך ש- $f(v_2)=\lambda_2 v_2$.

אני טוען כי v_1,v_2 בלתי-תלויים לינארית. ואמנם, אילו הם היו תלויים לינארית, היה מתקיים $v_2=cv_1$ ואז $f(v_2)=f(cv_1)=cf(v_1)=c\lambda_1 v_1=\lambda_1 v_2$. מצד שני, $f(v_2)=\lambda_2 v_2$, וזה גורר $\lambda_1 v_2=\lambda_2 v_2 \Rightarrow (\lambda_1-\lambda_2)v_2=0$ שזה בלתי-אפשרי כי $\lambda_1-\lambda_2\neq 0, v_2\neq 0$.

ובכן, נבחר $\{v_1,v_2\}$ כבסיס של V (נזכיר כי $\dim V=2$ לפי ההנחה).

כיוון ש- $f(v_1)=\lambda_1 v_1$ ו- $f(v_2)=\lambda_2 v_2$, המטריצה המיצגת של f בבסיס זה היא

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

<u>מקרה פחות פשוט</u>: $\lambda_1=\lambda_2$.

יהי λ השורש הכפול של המשוואה האפיינית. למערכת ההומוגנית $(A-\lambda I)v=0$ יש פתרון לא טריוויאלי. מהו מימד מרחב הפתרונות? ברור כי 1 או 2. שתי האפשרויות אלה אכן אפשריות.

<u>מקרה של מימד 2</u>. זה אומר כי $(A-\lambda I)v=0$ לכל $v\in V$. זה פשוט אומר כי $A=\lambda I$ ואם כן, בכל בסיס $A=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

<u>מקרה של מימד 1</u>. נבחר v_1 כך ש- $Av_1=\lambda v_1$; נשלים v_1 לבסיס $\{v_1,v_2\}$ של V.

מטריצה מיצגת של f תיראה אז $A=\begin{pmatrix}\lambda & a\\ 0 & b\end{pmatrix}$. יתר על כן, $b=\lambda$ כי λ שורש כפול של המשוואה האפיינית. לכן, $A=\begin{pmatrix}\lambda & a\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$. עכשיו, אם נחליף v_2 ב-$\frac{1}{\lambda}v_2$, בבסיס החדש f ייוצג ע"י המטריצה $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$.

בסיכום, הוכחנו את המשפט הבא:

משפט:

כל מטריצה 2×2 מעל שדה המרוכבים דומה לאחת המטריצות הבאות:

- $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$, $\lambda_1\neq\lambda_2$.
- $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$

4. מציאת ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים.

נחזור למקרה הכללי. כמו קודם, $\lambda\in k$ הוא ערך עצמי של מטריצה $A\in Mat_n(k)$ אם ורק אם
$\det(A-\lambda I)=0$.

נזכיר כי דטרמיננטה היא פונקציה פולינומיאלית של רכיבי המטריצה. לכן, המשוואה למציאת הערכים העצמיים הינה משוואה פילינומיאלית.

נזכיר

הגדרה. שדה k נקרא <u>שדה סגור אלגברית</u> אם לכל פולינום

$$f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \quad (n>0)$$

יש שורש ב-k.

<u>דוגמה</u>. שדה המרוכבים C סגור אלגברית ("המשפט העיקרי של אלגברה").

מעתה k שדה סגור אלגברית, למשל, שדה המרוכבים.

יהי f פולינום עם מקדם ראשי 1. אזי $f(t)=(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$ כאשר λ_i – שורשים של f. יש לציין כי, כמו במקרה $n=2$, בין השורשים יכולים להיות זהים.

מסקנה. לאופרטור במרחב n-מימדי (או למטריצה $n\times n$) n ערכים עצמיים (כאשר כל אחד נלקח עם ריבויו).

יהי λ ערך עצמי של A. כדי למצוא וקטורים עצמיים המתאימים ל-λ , יש לפתור

מערכת משוואות הומוגניות $(A-\lambda I)v=0$. אוסף פתרונות מערכת זו מהווה תת-מרחב של וקטורים עצמיים המתאימים לערך עצמי λ .

עוד מעט נוכיח כי מימד מרחב זה קטן או שווה לריבוי של λ .

אם נצליח למצוא n וקטורים עצמיים בלתי-תלויים לינארית, אז ניתן לבחור אותם כוקטורי הבסיס, ובבסיס חדש זה האופרטור תירשם ע"י מטריצה אלכסונית.
נזכיר כי כבר במקרה $n=2$ אין זה תמיד אפשרי.

5. פולינום אפייני.

הגדרה. תהי $A\in Mat_n(k)$. פולינום אפייני של A מוגדר ע"י הנוסחה
$P_A(t)=\det(t\cdot I-A)$.

נסמן את רכיביה של המטריצה $B=tI-A$: $B=(b_{ij})$, $b_{ij}=\begin{cases} t-a_{ij}, & i=j \\ -a_{ij}, & i\neq j \end{cases}$.

אזי, לפי הנוסחה המפורשת, $P_A(t)=\det(B)=\sum_{s\in S_n}\operatorname{sgn}(s)b_{s_1 1}b_{s_2 2}\cdots b_{s_n n}$.

כיוון שכל b_{ij} הוא פולינום בעל דרגה 0 או 1 , $P_A(t)$ הוא פולינום בעל דרגה $\leq n$.
נציין כמה תכונות של פולינום אפייני.

- דרגה של $P_A(t)$ היא n והמקדם הראשי שווה ל-1.
ואמנם, בנוסחה של דטרמיננטה האיבר המתאים לתמורת זהות הוא $(t-a_{11})\cdots(t-a_{nn})$. האיברים המתאימים לשאר התמורות, מכילים לכל היותר $n-2$ איברי האלכסון, כך ש הדרגה של שאר המחוברים היא $\leq n-2$.
- המקדם של t^{n-1} ב- $P_A(t)$ הוא $-tr(A)$ כאשר $tr(A)=a_{11}+\ldots+a_{nn}$ (עקבה של המטריצה).
זה נובע מאותו שיקול כמו הטענה הקודמת.
- האיבר החופשי של $P_A(t)$ שווה ל- $(-1)^n\det(A)$.
זה נובע מכך שהאיבר החופשי הוא $P_A(0)=\det(-A)$.
- אם C מטריצה הפיכה ואם $A'=C^{-1}AC$ אז $P_{A'}=P_A$.
זה נובע מנוסחת דטרמיננטה של מכפלת מטריצות:

$$\det(tI-C^{-1}AC)=\det(C^{-1}(tI-A)C)=\det(C)^{-1}\det(tI-A)\det(C)=\det(tI-A)$$

5. תת-מרחב אינווריאנטי, פולינום אפייני שלו ומרחב מנה.

קודם כל, הגדרה.
הגדרה. יהי $f\colon V\to V$ אופרטור על מרחב וקטורי ויהי W תת-מרחב וקטורי של V. המרחב W נקרא <u>תת-מרחב אינוואריאנטי</u>
אם $f(W)\subseteq W$.

הדוגמה: אם v הוא וקטור עצמי במרחב וקטורי V, תת-מרחב $W=Span\{v\}$ הוא תת-מרחב איבוואריאנטי.

כדאי להבין משמעות של התנאי בשפה של מטריצות. אם נבחר בסיס $v_1,\cdots,v_k$ ב- W
ונשלים אותו לבסיס $v_1,\cdots,v_n$ ב-V,
האופרטור ייוצג על-ידי מטריצה מהצורה

$$\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

כאשר A מטריצה ריבועית בגודל k, B מטריצה ריבועית בגודל $n-k$, והכיכבית מסמנת איברים שאנחנו לא טוענים דבר לגביהם.
זה מאפשר לחשב את הפולינום האפייני של f:

$$p_f(t) = \det(t \cdot id - f) = \det(t \cdot I - A)\det(t \cdot I - B) = p_A(t)p_B(t).$$

מטריצה A היא המטריצה המייצגת של הצמצום $f|_W$ של האופרטור f על המרחב W.
אנחנו רוצים להציג גם את המטריצה B כמטריצה של אופרטור.
יש לציין שזה לא צמצום של f על תת-מרחב הנפרש על-ידי שאר איברי הבסיס $v_{k+1}, \cdots, v_n$. כי המרחב הזה אינו אינווריאנטי, כך שהצמצום של f לא נותן אופרטור.

אנחנו נגדיר עתה מרחב וקטורי הקשור לזוג (V, W) ואופרטור עליו כך ש- B תהיה התטריצה המיצגת שלו.
המרחב שאנחנו נגדיר נקרא <u>מרחב מנה</u>. מסמנים אותו V/W.

יהי V מרחב וקטורי עם אופרטור $f: V \to V$ ויהי W תת-מרחב אינווריאנטי. נניח כי נתונה לנו העתקה ליניארית $p: V \to U$ על, כך ש-$W = Ker(p)$.
מתברר כי נתונים אלה מאפשרים להגדיר אופרטור $\bar{f}: U \to U$ כך שלכל $v \in V$ מתקיים $p\big(f(v)\big) = \bar{f}(p(v))$.
הנוסחה הזאת היא בעצם מפתח להגדרת $\bar{f}$: כדי להגדיר $\bar{f}(u)$, יש לבחור $v \in p^{-1}(u)$, ולהגדיר $\bar{f}(u) = p(f(v))$. חשוב להבין כי הגדרה זאת תעבוד רק אם W תת-מרחב אינווריאנטי: אם $p(v') = p(v) = u$, אז $v' - v \in W$ ואז גם $f(v') - f(v) = f(v' - v) \in W$ כך ש- $p\big(f(v')\big) = p(f(v))$. האופרטור $\bar{f}$ נקרא האופרטור המושרה על-ידי f .
יש דרך סטנדרטית לבנות העתקת על $f: V \to U$ בעלת גרעין W נתון. מרחב U כזה נקרא מרחב מנה. מסמנים אותו כ- V/W.

<u>*מרחב מנה*</u>

שוב יהיו $W \subseteq V$.
נגדיר קודם כל V/W כקבוצה. האיברים בה – תת-קבוצות ב-V מהצורה $v + W$, כאשר $v \in V$.

למשל, אם $V = \mathbb{R}^2$ ואם W תת-מרחב בעל מימד 1, זאת אומרת, קו ישר העובר דרך ראשית הצירים, אז מרחב מנה הוא אוסף קווים ישרים במישור המקבילים ל-W.

פעולות חיבור וכפל בסקלאר מוגדרות על-ידי הנוסחאות הבאות:
$$(v + W) + (v' + W) = (v + v') + W, \;\; c(v + W) = cv + W.$$

העתקה $p: V \to V/W$ המעבירה $v \in V$ ל- $v + W$ היא העתקה ליניארית. נציין כי $v + W = v' + W$ אם ורק אם $v - v' \in W$. לכן, גרעין של pהוא בדיוק W.

<u>*אופרטור המושרה על מרחב המנה*</u>

שוב, אם V מרחב וקטורי עם אופרטור $f:V\to V$ ואם W תת-מרחב אינווריאנטי של V,
האופרטור המושרה $\bar{f}:V/W\to V/W$ מוגדר ע"י הנוסחה $\bar{f}(v+W)=f(v)+W$.

עתה נחזור אל הפולינום האופייני של f. אפשר לבחור את האיברים $v_{k+1}+W,\cdots,v_n+W$ כבסיס במרחב מנה V/W.
קל מאוד לראות כי בבסיס זה האופרטור $\bar{f}$ מיוצג על-ידי המטריצה B.

בסופו שלש דבר, קיבלנו את התוצאה שרצינו:

משפט.
$$p_f(t)=\quad p_{f|_W}(t)p_{\bar{f}}(t).$$

6. פולינום של אופרטור.

יהי V מרחב וקטורי, $f:V\to V$ אופרטור ליניארי. אוסף כל האופרטורים $End(V)$ מהווה מה שנקרא אלגברה: זה מרחב וקטורי (ניתן לחבר אופרטורים ולהכפיל אותם בסקלאר)
שמוגדרת בו פעולה נוספת – במקרה שלנו היא הרכבה שך אופרטורים.
בפרט, אם f אופרטור, הרכבה של f עם עצמו n פעמים היא גם אופרטור שנקרא f^n.
באותה מידה, אם $p(t)=\sum_{i=0}^n a_i t^i$ פולינום, יש משמעות לביטוי $p(f)=\sum_{i=0}^n a_i f^i$.

נציין כי אם פולינום $p(t)$ הוא מכפלה של שני פולינומים, $p(t)=q(t)r(t)$, אזי מתקיים שוויון $p(f)=q(f)r(f)$.

7. משפט קיילי-המילטון (Cayley-Hamilton) .

נוכיח עתה
משפט (קיילי-המילטון). תהי $A\in Mat_n(k)$. אזי $P_A(A)=0$.
הוכחה. אנחנו נוכיח את המשפט בהנחה כי השדה k סגור אלגברית.
הנחה זו אינה חשובה – אפשר להסיק את המקרה הכללי מהמקרה של שדה סגור אלגברית.
את ההסקה זו נביא בסוף ההוכחה.

נוכיח את המשפט באינדוקציה לפי גודל המטריצה.
<u>בסיס האינדוקציה</u>. $n=1$.
מטריצה A כאן - סקלר $c\in k$. הפולינום האפייני - $P=t-c$. אם נציב $t=A$,
נקבל $P_A(A)=c\cdot I-A=0$.
<u>צעד האינדוקציה</u>. נניח כי המשפט כבר נבדק עבור מטריצות ב- $Mat_{n-1}(k)$.
נוכיח עבור $A\in Mat_n(k)$.
כיוון שהשדה סגור אלגברית, לפולינום האפייני של A יש שורש, נגיד, λ.
נבחר וקטור $0\neq v\in V$ וקטור עצמי ל-A, כך ש- $Av=\lambda v$.

נשלים $v\in k^n$ לבסיס ב- k^n: $v=v_1,\dots,v_n$. מטריצה A דומה למטריצה

$$B=\begin{pmatrix}\lambda & b_{12} & \dots & b_{1n}\\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n}\\ 0 & \dots & & \\ \dots & & & \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn}\end{pmatrix}$$

שהיא מייצגת את אותו האופרטור אך בבסיס חדש. למטריצות דומות אותו פולינום אופייני,
כך ש- $P_A(t)=P_B(t)$.
לכן, המטריצות $P_A(A)=P_B(A)$ ו- $P_B(B)$ דומות. לכן, מספיק לנו להוכיח כי $P_B(B)=0$.
נסמן ב- C את המטריצה שמתקבלת מ- B ע"י מחיקת השורה הראשונה והעמודה הראשונה.
אזי $P_B(t)=\det(tI-B)=(t-\lambda)\det(tI-C)=(t-\lambda)P_C(t)$.

בואו נחשב $P_C(B)$.
נציין:

$$B^n=\begin{pmatrix}\lambda^n & *\\ 0 & C^n\end{pmatrix}, B^2=\begin{pmatrix}\lambda^2 & *\\ 0 & C^2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}\lambda & *\\ 0 & C\end{pmatrix}$$

ולכן גם $P(B)=\begin{pmatrix}P(\lambda) & *\\ 0 & P(C)\end{pmatrix}$ לכל פולינום P . אם נציב P_C , נקבל כי $P_C(B)$ היא מטריצה שכל שורותיה, פרט לשורה הראשונה, מתאפסות. לעומת זאת, ל- $B-\lambda I$ עמודה הראשונה מתאפסת. לכן,

$$P_B(B)=(B-\lambda I)P_C(B)=0 \ .$$

המשפט הוכח, אם כי בהנחה כי השדה k סגור אלגברית.

כדי להוכיחו בלי הנחה זו, יש להשתמש בעובדה מתורת השדות, שנציג אותה ללא הוכחה.

עובדה. לכל שדה k קיים שדה סגור אלגברית F המכיל את k .
דוגמאות. השדות R,Q מוכלות בשדה המרוכבים C שהוא שדה סגור אלגברית.

יהי עתה k שדה המוכל בשדה F סגור אלגברית. אם $A\in Mat_n(k)$, אפשר להסתכל על A
כעל מטריצה בעלת רכיבים ב- F. פולינום אפייני שלה לא תלוי בשדה בו אנחנו עושים את החישובים. לכן, מהעובדה ש- $P_A(A)=0$ שאנו יודעים עבור שדה F נובע כי אותה טענה תקפה
גם עבור שדה k .
סוף ההוכחה.