דרגת מטריצה ומינורים. מטריצות עם פרמטר

1. בקורס של אלגברה לינארית אך למדנו מושג של דרגת מטריצה. בהרצאה זו נלמד דרך חישוב הדרגה – המסתמכת על דטרמינטות. נזכיר:

$A \in Mat_{m\times n}(F) \Leftarrow rk(A)$, הדרגה של A, מוגדרת כמספר שורות בלתי-תלויות של A (ס.ל., מימד המרחב הנפרש על-ידי השורות).
הגדרה השקולה — מימד המרחב הנפרש ע"י העמודות.
אם נזכור כי המרחב הנפרש ע"י העמודות הוא תמונה של ההעתקה הלינארית המיוצגת על-ידי המטריצה, נקבל הגדרה שלא תלויה בבחירת הבסיסים במרחבים V, W, עבור $f: V \to W$:
הדרגה של f היא מימד של התמונה $f(V) \subseteq W$.
אם $\dim V = n$, $\dim W = m$, $rk(A) \leq \min\{m,n\}$.

נזכיר כי לכל $f: V \to W$ ניתן להתאים בסיס ב-V וב-W כך ש-f תיוצג על-ידי מטריצה $A' = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, אז, בשפה של מטריצות, את כל מטריצה A ניתן להציג כך:

$$A = C^{-1} A' D$$

כאשר C, D הפיכות ואילו A' מטריצה כמו מצויין קודם.
דרגה של A פה היא מספר האלכסון ב-A'.

נזכיר כי אם A ריבועית, $\det A = 0$ אם ורק אם A לא הפיכה, ס.ל. אם ורק אם $rk(A)$ לא מקסימלית. קריטריון שלנו יהיה הכללה של העובדה הזאת.

<u>הגדרה</u> תת-מטריצה בגודל k של מטריצה A היא מטריצה המתקבלת על-ידי בחירה של k עמודות ו-k שורות של A.
דטרמינטה של תת-מטריצה בגודל k נקראת מינור בגודל k.

למטריצה m×n ישנם $\binom{m}{k}\binom{n}{k}$ מינורים בגודל k

<u>משפט</u> התכונות הבאות שקולות:

(1) $rk(A)\le k$ (2) כל המינורים של A בגודל k+1 מתאפסים.

<u>הוכחה</u> הרעיון שלנו - אנחנו רוצים לבדוק את שתי התכונות עבור מטריצה מאוד פשוטה - מטריצה A' מהעמוד הקודם, ולומר כי גם (1) וגם (2) הן תכונות שלא תלויות בבחירת הבסיסים.

(א) אם

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ & 1 & & & 0 \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ \hline & 0 & & & 0 \end{array}\right)$$

אז $rk(A)=k$ - מספר האחדים על האלכסון, וכל מינור בגודל $k<$ מכיל עמודת אפסים - לכן מתאפס.

(ב) מושג הדרגה הוא לא תלוי בבחירת הבסיס.

(ג) לכן, אם נוכיח כי גם תכונה (2) לא תלויה בבחירת הבסיס, זה יוכיח את המשפט.

באופן דומה, נסכים לומר כי מטריצה A מקיימת תכונה M_k אם כל המינורים של A בגודל k+1 מתאפסים.

כדי להוכיח את המשפט, עלינו להוכיח כי אם A ו- B מטריצות של אותה העתקה לינארית $f:V\to W$ (בבסיסים שונים) אז A מקיימת M_k אם ורק אם B מקיימת M_k. במלים אחרות, אם $B=C^{-1}AD$ כאשר C, D מטריצות הפיכות, עלינו להוכיח כי A מקיימת M_k אם ורק אם B מקיימת M_k.

כל מטריצה הפיכה היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות (כי ניתן להפוך אותה למטריצת יחידה בעזרת פעולות אלמנטריות).

לכן, מספיק להוכיח את הטענה בשני מקרים:

$B=EA$ או $B=AE$

כאשר E מטריצה אלמנטרית.

נניח כי A מקיימת M_K אז ורק אם A^t מקיימת M_K.

כיוון ש- $(AE)^t = E^t A^t$, ו- E^t גם כן מטריצה אלמנטרית, מספיק לבדוק את הטענה במקרה $B=AE$ בלבד.

הנה המשפט שנשאר לנו לבדוק.

<u>משפט</u> יהיו $B=AE$ כאשר E מטריצה אלמנטרית.

אז: A מקיימת M_K $\Leftrightarrow$ B מקיימת M_K.

<u>הוכחה</u>

א. נוכיח כי A מקיימת M_K $\Leftarrow$ B מקיימת M_K.

אם $E=E_i(\lambda)$, B מתקבלת מ- A על-ידי הכפלה של עמודה i במספר $\lambda\neq 0$. זה ברור שמר על תכונה M_K.

אם $E=E_{ij}$, B מתקבלת מ- A על-ידי התלפת שורות i,j.

אם כל המינורים של A בגודל $k+1$ היו שווים ל- 0, כל המינורים של B גם יהיו שווים ל- 0. – אלה יהיו אותם מינורים, עד כדי סימן ± 1, ועד כדי סדר.

אם $E=E_{ij}(c)$, עמודה i תגשה v_i היא $v_i + c\cdot v_j$.

כל המינור של B שאינו מכיל עמודה i, יהיה כמו שהיה ב- A.

המינור של B המכיל עמודה i יהיה צירוף לינארי של שני מינורים של A. בכל מקרה, אם כל המינורים של A בגודל $k+1$ מתאפסים, אותה תכונה גם ל- B.

ב. האימפליקציה השניה: A מקיימת M_K $\Rightarrow$ B מקיימת M_K

צוררת מהאימפליקציה הראשונה, שהרי

$$A=BE^{-1} \Leftarrow B=AE,$$

ואילו E^{-1} גם כן מטריצה אלמנטרית.

כהן סוף ההוכחה.

2. מטריצות עם פרמטר

הכוונה בשאלת תאחד שני נושאים שונים מאוד שניהם מראים חשיבות של דטרמינטה. הנושא הראשון יעסיק אותנו הרבה זמן – ויביא בסוף למיון אופרטורים לניאריים (צורת ג'ורדן של מטריצה). הנושא השני קשור למושג כיוון (אוריאנטציה) של מרחב – שיש לו חשיבות לא רק באלגברה, אלא גם בגיאומטריה ובפיסיקה.

2.1 חקירת אופרטורים – ערכים עצמיים.

בהינתן מטריצה A, נגדיר מטריצה $B(t)$ התלויה בפרמטר $t \in F$ על-ידי הנוסחא

$$B(t) = A - tI$$

הרכיבים של B מתנועע לאלכסון צהיק לרכיבים המתאימים של A.
הרכיבים על האלכסון הם בצורה $b_{ii} = a_{ii} - t$.
אנחנו יודעים כי $\det B(t) = 0$ אם ורק אם $B(t)$ לא הפיכה, כ.א. אם ורק אם למשוואה

$$(A - tI)v = 0$$

יש פתרון לא טריוויאלי. משמעות המשוואה:

$$Av = tv$$

– זאת אומרת כי האופרטור המוגדר על-ידי מטריצה A, מכפיל את הוקטור v במספר t.

בהמשך אנו נראה כי הפונקציה $\det(A - tI)$ היא פולינום של t, בעל מעלה השווה לגודל המטריצה A.
אם נצליח למצוא את כל השורשים של המשוואה, $t_1, \dots, t_n$, ולכל שורש t_i נמצא וקטור v_i: $Av_i = t_i v_i$, אז יש סיכוי כי $v_1, \dots, v_n$ יהוו בסיס במרחב וקטורי. בבסיס זה המטריצה A תיוצג על-ידי מטריצה אלכסונית

$$A' = \begin{pmatrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n \end{pmatrix}$$

כלומר תמיד אפשרי, אבל זה הכיוון בו אנחנו נתפש את המון של אופרטורים.

השורשים $t_1,\dots,t_n$ של המשוואה

$$\det(A-tI)=0$$

נקראים <u>ערכים עצמיים</u>. זה אתר המושגים התשובים באות האופרטורים.

2.2 כיוון של מרחב וקטורי

בסעיף זה $F=\mathbb{R}$.

יהי V מרחב וקטורי בעל מימד סופי מעל $\mathbb{R}$. שני בסיסים ב-V יקראו <u>שקולים</u> אם מטריצת המעבר היא בעלת דטרמינטה <u>חיובית</u>.

לחס שקילות זה שני מחלקות שקילות. כל אחת נקראת <u>כיוון</u> ו/או <u>אוריינטציה</u> (orientation) של המרחב V. לכן, לכל מרחב וקטורי שני כיוונים. אפשר לקבוע כיוון ע"י בחירת בסיס (= נציג של מחלקת שקילות).

כל זה מאוד בסוט. אבל חשובות אמיתית של מושג הכיוון מגיעות רק כשנבין יותר טוב מה מקור גיאומטרי של מושג השקילות שהגדרנו.

<u>מסלה רציפה</u> (של מטריצות הפיכות) היא מטריצה $B(t)$ התלויה בפרמטר t באופן רציף. זה אומר פשוט כי כל רכיב $b_{ij}(t)$ הוא פונקציה רציפה של פרמטר t.

מעתה ענית בנוסף כי:

- $B(t)$ מוגדרת לעבור $t\in[0,1]$, $B(t)$ הפיכה לכל t

$B(0)=I$, $B(1)=A$.

במלים אחרות, המטריצה $B(t)$ היא מסילה רציפה באוסף מטריצות הפיכות, המתחברת את מטריצת יחידה $B(0)=I$ עם המטריצה הנתונה A.

אנחנו מיד רואים כי אם קיימת מסילה כזאת, המתחברת I עם A, אז $\det(A)>0$. ואמנם, $\det B(t)$ היא פונקציה רציפה של t, מקבלת ערך $\det(I)=1$ בקצה אחד וערך $\det(A)$ בקצה השני של הקטע $[0,1]$. משפט ערך הביניים של חדו"א אומר כי $\det(A)>0$.

אפשר להסתכל במטריצה הפיכה כמטריצת מעבר מבסיס אחד לבסיס אחר. בדר is מסילה $B(t)$ כמו שמתוארת קודם, מתארת שינוי רציף של וקטורי בסיס $v_1(t),\dots,v_n(t)$ $t\in[0,1]$ כך שבכל רגע נתון הוקטורים יהווו בסיס (= יהיו בלתי תלויים)

כפי שראינו, מטריצת מעבר מהבסיס ההתחלתי $v_1(0),\dots,v_n(0)$ לכל בסיס שבדרך $v_1(t),\dots,v_n(t)$ תהיה בעלת דטרמיננטה חיובית. במלים אחרות, שני בסיסים שהתקבלו אחד מהשני על-ידי תנועה רציפה, הם שקולים – הם מגדירים אותו כיוון של המרחב הוקטורי.

מתברר (אנחנו נוכיח אותה בהמשך הקורס) כי גם ההפך הוא נכון: אם שני בסיסים מגדירים אותו כיוון של המרחב, אפשר ~~להעביר אחד אל~~ להפוך את הבסיס הראשון בבסיס השני על-ידי תנועה רציפה, כמו שמתואר קודם.

בשפה של מטריצות: אם $\det(A)>0$, קיימת מסילה רציפה $B(t)$ של מטריצות הפיכות, כך ש- $B(0)=I$, $B(1)=A$.