# דטרמיננטות (המשך)

**1. מטריצה משולשית.**

תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה משולשית עליונה, ז.א. $a_{ij}=0$ כאשר $i>j$.

אזי $\det(A)=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

ואמנם, המכפלה $a_{s_1,1}\cdots a_{s_n,n}$ לא מתאפסת רק כאשר $s_i\le i$ לכל $i$.

זה מיד נותן $s_i=i$, זאת אומרת, $s=1$. לכן, הנוסחה המפורשת נותנת

את הנוסחה $\det(A)=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

**2. למה.** תהי $d:Mat_n(k)\to k$ פונקציה המקיימת את התכונות הבאות:

- מולטי- ליניאריות
- אנטי-סימטריות.

אזי לכל מטריצה $A\in Mat_n(k)$ מתקיים שוויון $d(A)=\det A\cdot d(I)$.

**הוכחה.** הוכחה זו היא חזרה על הסקת הנוסחה המפורשת לדטרמיננטה.

תהי $A=(a_{ij})=(v_1,\ldots,v_n)$ כאשר $v_j=\sum a_{ij}e_i$ (הסימון סטנדרטי).

לפי המולטי-ליניאריות

$$d(A)=\sum_{s_1,\ldots,s_n}a_{s_s,1}a_{s_2,2}\cdots a_{s_n,n}d(e_{s_s},\ldots,e_{s_s})=$$

לפי אנטי-סימטריות

$$=\sum_{s\in S_n}a_{s_s,1}a_{s_2,2}\cdots a_{s_n,n}d(e_{s_s},\ldots,e_{s_s})=$$

שוב לפי האנטי-סימטריות

$$=\sum_{s\in S_n}\operatorname{sgn}(s)a_{s_s,1}a_{s_2,2}\cdots a_{s_n,n}d(I)$$

**3. מסקנה.** $\det(AB)=\det(A)\det(B)$.

**הוכחה.** נגדיר פונקציה $d:Mat_n(k)\to k$ ע"י הנוסחה

$d(B)=\det(AB)$.

נציין כי אם $B=(v_1,\ldots,v_n)$ אז $AB=(Av_1,\ldots,Av_n)$. לכן, אם $v_i=v_i'+v_i''$,

מתקיים גם $Av_i=Av_i'+Av_i''$ וזה גורר מיד את מולטי-ליניאריות.

בדרך דומה, אם $v_i=v_j$ אז $Av_i=Av_j$ וזה גורר אנטי-ליניאריות. לכן, לפי הלמה

הקודמת, $\det(AB)=d(B)=\det(B)\det(A)$.

**4. דטרמיננטה של מטריצה הפיכה.**

אם $A$ הפיכה, $\det(A)\det(A^{-1})=\det(AA^{-1})=1$. בפרט $\det(A)\neq 0$.

אנחנו נראה עוד מעט כי גם ההפך הוא נכון: אם מטריצה אינה הפיכה,
הדטרמיננטה שלה שווה לאפס.

**5. פעולות יסוד (אלמנטאריות) עם עמודות המטריצה.**

1. החלפת עמודות – מכפילה דטרמיננטה ב- $-1$ (נובע מאנטי-סימטריות).
2. הכפלה של עמודה בסקלר $\lambda\in k$ – מכפילה דטרמיננטה ב- $\lambda$ (נובע מליניאריות).
3. עמודה $v_i$ מוחלפת ב- $v_i'=v_i+c\cdot v_j$. פעולה זו לא משפיעה על הדטרמיננטה.

נבדוק את הטענה האחרונה. יהיו $A=(\ldots,v_i,\ldots,v_j,\ldots)$, $A'=(\ldots,v_i',\ldots,v_j,\ldots)$.

נשתמש בליניאריות לפי ארגומנט $i$. נקבל

$\det(A')=\det(A)+c\det(\ldots,v_j,\ldots,v_j,\ldots)=\det(A)$.

עתה אנו יכולים לחשב בעזרת פעולות יסוד את הדטרמיננטה של כל מטריצה:
אנו יודעים מה קורה לדטרמיננטה כשמבצעים כל פעולת יסוד; אנו יודעים

להביא כל מטריצה למטריצה משולשית בעזרת פעולות יסוד, וגם יודעים דטרמיננטה של מטריצה משולשית.

**6. דוגמה.**

**7. מטריצות יסוד; פעולות יסוד עם שורות.**

תהי $E_{ij}$ מטריצה המתקבלת ממטריצת היחידה $I$ ע"י החלפת עמודות $i$ ו- $j$ .

$E_i(\lambda)$ $(\lambda \neq 0)$ מטריצה המתקבלת ממטריצת היחידה $I$ ע"י הכפלת עמודה $i$ ב- $\lambda$.

$E_{ij}(c)$ מטריצה המתקבלת ממטריצת היחידה $I$ ע"י פעולת היסוד בה מוסיפים לעמודה $i$ את עמודה $j$ המוכפלת ב- $c$ . מטריצות $E_{ij}(c), E_i(\lambda), E_{ij}$ נקראות מטריצות יסוד (מטריצות אלמנטאריות, elementary matrices).

להלן נוסחאות מפורשות למטריצות יסוד.

$$E_{ij} = (a_{rs}) \text{ כאשר } a_{rs} = \begin{cases} 1, & r = s \notin \{i, j\} \\ 1, & (r,s) = (i, j) \\ 1, & (r,s) = (j,i) \\ 0, & otherwise \end{cases},$$

$$E_i(\lambda) = (a_{rs}) \text{ כאשר } a_{rs} = \begin{cases} 1, & r = s \neq i \\ \lambda, & r = s = i \\ 0, & otherwise \end{cases},$$

$$E_{ij}(c) = (a_{rs}) \text{ כאשר } a_{rs} = \begin{cases} 1, & r = s \\ c, & (r,s) = (j,i) \\ 0, & otherwise \end{cases}.$$

דטרמיננטות של מטריצות יסוד הן :

$\det E_{ij} = -1, \det E_i(\lambda) = \lambda, \det E_{ij}(c) = 1$ - זה נובע, למשל, מסעיף 5.

אם $A$ מטריצה ואם $E$ מטריצת יסוד כלשהי, אז המכפלה $AE$ מתקבלת מ- $A$ ע"י פעולת יסוד עם עמודות המתאימה ל- $E$. זה מאפשר לקבל מחדש את התאנות של סעיף 5 בעזרת הנוסחה $\det(AE) = \det(A)\det(E)$.

עכשיו אנחנו מוכנים להבין מה קורה לדטרמיננטה כאשר מבצעים פעולת יסוד <u>עם שורות</u>: הרי פעולות אלה אפשר לתאר כהכפלה של מטריצה במטריצת יסוד מצד שמאל:

- הכפלה ב- $E_{ij}$ מחליפה שורות $i$ ו- $j$ .
- הכפלה ב- $E_i(\lambda)$ מכפילה את השורה $i$ ב- $\lambda$.
- הכפלה ב- $E_{ij}(c)$ מוסיפה לשורה $j$ במטריצה את שורה $i$ המוכפלת ב- $c$.

כמסקנה, אנחנו מקבלים שפעולות יסוד עם שורות משנות את הדטרמיננטה באותה דרך כמו פעולות עם עמודות: החלפת שורות מחליפה סימן, הכפלת שורה בסקלר מכפילה דטרמיננטה באותו סקלר, והוספה לשורה של שורה אחרת מוכפלת מסקלר לא משנה את הדטרמיננטה.

**8. מטריצה משוחלפת (transpose).**

מטריצה משוחלפת של $A = (a_{ij})$ היא מטריצה $A^t$ שרכיב ה- $(i, j)$ שלה שווה ל- $a_{ji}$ .

**משפט.** $\det(A^t) = \det(A)$

**הוכחה.** נבדוק קודם כל את הטענה בשני מקרים פרטיים:

- $A$ משולשית עליונה. אזי $\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$, $A^t$ משולשית תחתונה עם

אותם רכיבים $a_{11},\dots,a_{nn}$ באלכסון, כך שמתקיים $\det(A^t)=a_{11}\cdots a_{nn}$ .

- $A$ מטריצת יסוד. מטריצות $E_{ij}, E_i(\lambda)$ סימטריות כך שאין מה להוכיח עבורן. עבור $A=E_{ij}(c)$ מתקיים $A^t=E_{ji}(c)$ , כך ש- $\det(A)=\det(A^t)=1$ .

עתה נוכיח את המשפט עבור מטריצה $A$ כללית.
אנו יודעים כי ניתן להביא כל מטריצה לצורת מדרגה ע"י פעולות יסוד עם שורות.
זה אומר כי ניתן לכתוב

$$E_n\cdots E_1 A = B$$

כאשר $E_i$ מטריצות יסוד ו- $B$ מטריצה בצורת מדרגה (בפרט, $B$ משולשית).
אזי $A=E_1^{-1}\cdots E_n^{-1}B$ , $A^t=B^t(E_n^{-1})^t\cdots(E_1^{-1})^t$ ולכן

$$\det(A^t)=\det(B^t)\prod\det(E_i^{-1})^t=\det(B)\prod\det(E_i^{-1})=\det(A).$$

נציין כי עכשיו אנו מסוגלים כבר לסיים דיון של סעיף 4: אם $A$ לא הפיכה, שיטת גאוס מביאה אותה למטריצה $B$ בצורת מדרגה, שהשורה האחרונה של $B$ שווה לאפס.
בפרט, $b_{nn}=0$ וזה גורר כי $\det(B)=0$. לכן, גם $\det(A)=0$ .

**9. פתוח לפי שורה. פתוח לפי עמודה.**

תוך כדי הוכחת קיום דטרמיננטה, השתמשנו בנוסחת נסיגה:

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(A^{1j})$$

כאשר $A^{ij}$ מטריצה המתקבלת מ- $A$ ע"י מחיקת שורה $i$ ועמודה $j$ (בנוסחה $i=1$ ).
נוסחה זאת נקראת נוסחת פיתוח דטרמיננטה לפי שורה ראשונה.
עתה נסיק נוסחה כללית יותר של פיתוח דטרמיננטה לפי שורה $i$ .
במקום להוכיח את הנוסחה הכללית מחדש, נשתמש במקרה הפרטי שכבר יודעים.
תהי $B=(b_{ij})$ מטריצה המתקבלת מ- $A$ ע"י העברת שורה $i$ למעלה, אל מקום של שורה 1.
פעולה זו שקולה ל - $(i-1)$ החלפות שורות (שורה $i$ עם $i-1$ , אחר כך עם $i-2$ , וכן הלאה.
לכן, $\det(A)=\det(B)\cdot(-1)^{i-1}$.
עתה נשתמש בפיתוח $\det(B)$ לפי השורה הראשונה. נקבל

$$\det(B)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}b_{1j}\det(B^{1j})=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{ij}\det(A^{ij}),$$

וזה נותן לבסוף

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A^{ij}).$$

זאת נוסחת פיתוח לפי שורה $i$ .

עתה נקבל נוסחת פיתוח לפי עמודה $j$ .
נשתמש בכך שעמודה $j$ במטריצה $A$ מתאימה לשורה $j$ במטריצה המשוחלפת.
לפי הנוסחה הקודמת

$$\det(A')=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a'_{ji}\det(A'^{ji})$$ (פיתוח לפי שורה $j$ ).

אם ניקח בחשבון כי $\det(A')=\det(A)$ וגם $a'_{ji}=a_{ij}, A'^{ji}=A^{ij}$ , נקבל בסופו של דבר

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A^{ij}).$$

**תרגיל:** מצאו הבדל בין נוסחות פיתוח דטרמיננטה לפי שורה ולפי עמודה.

**10. מטריצת בלוקים.**

תהי $A=\begin{pmatrix} BC \\ 0D \end{pmatrix}$ כאשר $B$ מטריצה $m\times m$ , $D$ מטריצה $n\times n$ , ו- $C$ מטריצה $m\times n$ .

נוכיח עתה כי $\det(A)=\det(B)\det(D)$.

**הוכחה.** אינדוקציה לפי $m$ .

משתמשים בפיתוח לפי עמודה ראשונה של $A$. כיוון ש- $a_{i1}=0$ עבור $m<i$, מקבלים

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}a_{i1}\det(A^{i1}).$$

במקרה $m=1$ זה נותן את הנוסחה הנדרשת $\det(A)=a_{11}\det(D)$.

במקרה $m>1$ הנחת האינדוקציה נותנת $\det(A^{i1})=\det(B^{i1})\det(D)$, ואז מקבלים

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}a_{i1}\det(B^{i1})\det(D)=\det(B)\det(D).$$

המשפט הוכח.

**11. נוסחה למטריצה הופכית.**

נזכיר כי אם מטריצה $A=\begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix}$ הפיכה, אז $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d-b \\ -c\ a \end{pmatrix}$.

עתה נציג הכללה של נוסחה זו עבור מטריצות ריבועיות כלליות.

נגדיר מטריצה חדשה $A'=(a'_{ij})$ ע"י הנוסחה $a'_{ij}=(-1)^{i+j}\det(A^{ji})$ כאשר $A^{ji}$ מתקבלת מ- $A$ ע"י מחיקת שורה $j$ ועמודה $i$.

נכפיל $A$ ב- $A'$ :

$$(AA')_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a'_{kj}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{ik}\det A^{jk}$$

במקרה $i=j$ (איבר האלכסון) הנוסחה נותנת $\det(A)$ . תיכף נבין שהנוסחה נותנת אפס מחוץ לאלכסון. ואמנם, נניח $i\neq j$ . נבנה מטריצה $B$ כדלקמן: נמחק ב- $A$ שורה $j$ , ונכתוב בתוכה שורה $i$ . ל- $B$ שתי שורות זהות. לכן, $\det(B)=0$ . אך, מצד שני, אם נפתח $\det(B)$ לפי שורה $j$ , נקבל את האגף הימיני של הנוסחה דלעיל.

אנחנו קיבלנו כי $AA'=\det(A)\cdot I$ . לכן, $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}A'$.

זאת נוסחה מפורשת למטריצה הופכית.

<u>הערה</u>. הדרך כלל שימוש בנוסחה המפורשת לחישוב מטריצה הופכית לא יעיל. האלגוריתם היעיל ביותר לחישוב מטריצה הופכית הוא האלגוריתם המבוסס על שיטת גאוס.

**12. כלל קראמר (Cramer Rule) .**

נוסחה מפורשת לחישוב מטריצה הופכית מאפשרת להציג נוסחה מפורשת גם לפתרון למערכת משוואות ליניאריות.

תהי $Ax=b$ מערכת משוואות ליניאריות, כך ש- $A$ ריבועית (מספר הנעלמים שווה למספר המשוואות). נניח כי $A$ הפיכה.

אזי הפתרון הוא

$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det(A)} A'b$ כאשר $A' = (a'_{ij})$ עם $a'_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A^{ji})$.

לכן, $x_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} a'_{ij} b_j}{\det(A)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_j \det(A^{ji})}{\det(A)}$ .

נשאר להוסיף כי את המונה של הנוסחה ניתן לפרש כפיתוח לפי עמודה של דטרמיננטה מסוימת:

תהי $A_i$ מטריצType equation here.ה המתקבלת מ-$A$ ע"י החלפת עמודה $i$ בעמודה $b$ של האיברים
החופשיים. אזי לפתרון $x$ קיבלנו נוסחה מפורשת :

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} .$$

## 13. מטריצת Vandermonde ושימושיה

אנחנו יודעים היטב כי דרך שתי נקודות שונות ניתן להעביר קו ישר יחד. ומה לעשות אם יש לנו יותר משתי נקודות? האם עבור $n$ נקודות אפשר למצוא פונקציה פולינומיאלית $y = f(x)$ שעוברת דרך כולן? ופולינום בעל איזו מעלה עלינו לחפש?

יהיו $x_1, \dots, x_n$ ערכים של המשתנה $x$ ויהיו $y_1, \dots, y_n$ ערכים של הפונקציה. עלינו למצוא פולינום $f(x)$ כך ש $f(x_i) = y_i$ . לפולינום בעל מעלה $m$ יש $m+1$ מקדמים - $a_0, a_1, \dots, a_m$.
לכן סביר להניח כי, כדי שהגרף יעבור דרך $n$ נקודות, יש לחפש פולינום בעל מעלה $n-1$.
הנחה זו מתיישבת היטב גם עם העובדה הידועה כי לשתי נקודות יש יחפש קו ישר – פולינום ממעלה 1.

הבעיה שלנו היא למצוא את המקדמים $a_0, \dots, a_{n-1}$ המקיימים את המשוואות

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k {x_j}^k = y_j \ , j = 1, \dots, n.$$

זאת מערכת של $n$ משוואות ליניאריות עם $n$ נעלמים. אם יש לה דטרמיננטה שונה מאפס – למערכת פתרון יחיד: קיים ויחיד פולינום העובר דרך הנקודות הנתונות.

המטריצה שדטרמיננטה שלה כה חשובה לנו, נקראת מטריצה של Vandermonde על שמו של מדען צרפתי של החצי השני של המאה 18.

רכיביה של המטריצה הם חיזקות של $x_i$. הנה היא:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 x_1^2 \dots x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 x_2^2 \dots x_2^{n-1} \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ 1 & x_n x_n^2 \dots x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

דטרמיננטה של מטריצה זו נקראת דטרמיננטת ונדרמונד.

<u>**משפט**</u> דטרמיננטת ונדרמונד שווה ל- $\prod_{i>j}(x_i - x_j)$.
בפרט, היא שונה מאפס כאשר כל ה $x_i$ שונים זה מזה.
<u>*הוכחה*</u>
יש, בעצם, שתי הוכחות. השנייה תהיה הרבה יותר יפה ופשוטה, אך תשתמש ברעיונות שלא נוכל, בשלב זה, להצדיק. הנה הוכחה ראשונה.

*<u>שלב ראשון</u>*

נחסיר מכל שורה מספר $k$ , החל מהשורה השנייה, את השורה הראשונה.
נקבל מטריצה שבה אותה שורה הראשונה, ובמקום $(k,l)$ עבור $k>1$, נמצא מספר $x_k^{l-1}-x_1^{l-1}$ . בפרט, עבור $l=1$ מספר זה שווה לאפס.

*<u>שלב שני</u>*

נחסיר מכל עמודה מס' $l$ (מתחילים ב- $l=n$ ) את העמודה מס' $l-1$ המוכפלת ב- $x_1$ .
בשורה הראשונה ישאר רק 1 בפינה השמאלית, ובמקום ה- $(k,l)$ עבור $k,l\geq 2$, יהיה

$$x_k^{l-1}-x_1^{l-1}-x_1\left(x_k^{l-2}-x_1^{l-2}\right)=(x_k-x_1)x_k^{l-2}.$$

*<u>שלב שלישי</u>*

עתה קל מאוד לערוך אינדוקציה.
נסמן

$$W(x_1,\dots,x_n)$$

דטרמיננטת ונדרמונד.
אזי השבים ראשון ושני שעשינו נותנים:

$$W(x_1,\dots,x_n)=\prod_{k=2}^{n}(x_k-x_1)\cdot W(x_2,\dots,x_n).$$

נוסחה זו מיד נותנת את הנדרש.

*<u>הוכחה שניה</u>*

דטרמיננטת ונדרמונד היא פולינום של $x_1,\dots,x_n$. אם נציב $x_k=x_l$, דטרמיננטה מתאפסת (שתי שורות זהות). לכן, דטרמיננטת ונדרמונד מתחלקת בכל הפרש $x_k-x_l$. לכן היא מתחלקת גם במכפלתם של כל ההפרשים. נשאר רק לחשב את המקדם – הוא שווה ל-1.