<u>דטרמיננטות</u>

1. תזכורת: מטריצות 2×2 .

נתבונן במערכת שתי משוואות עם שני נעלמים. אנחנו יודעים כי קיום פתרון יחיד למערכת קשור להפיכות מטריצת המקדמים. נשאל שאלה: מהם התנאים על הרכיבים a,b,c,d של מטריצה $A=\begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix}$ השקולים להפיכות של A ?

התשובה היא קלה יחסית: A הפיכה אמ"מ הוקטורים $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ לא קולינאריים (פרופורציונאליים). זה מתקיים אמ"מ $ad-bc\neq 0$.

הגדרה: עבור מטריצה $A=\begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix}$ דטרמיננטה שלה מוגדרת ע"י הנוסחה $\det(A)=ad-bc$.

בפרק זה אנו נכליל מושג הדטרמיננטה למטריצות $n\times n$ ונלמד תכונותיה היפות.

2. משמעות גיאומטרית.

נניח שהשדה שלנו הוא שדה הממשיים R . יהי $A=\begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix}$. נשרטט את שני הוקטורים $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$-ו $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ על המשור R^2 . נקבל מקבילית שלקדקודיה קואורדינאטות

$$0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, w=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, v+w=\begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix} .$$

מתברר כי, עד כדי הסתייגויות חשובות לגבי סימן $\pm$, $\det\begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix}$ הוא השטח של המקבילית שבשרטוט.

הנה אחת הדרכים להוכיח זאת. יהיו $v=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, w=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$. נבחר מספר λ ונגדיר $w'=w+\lambda v$.
נשווה את המקביליות הנוצרות ע"י (v,w) וע"י (v,w') . למקביליות אלו אותו בסיס v ואותה גובה. לכן, חייב להיות להן אותו שטח.
נבדוק כי גם הדטרמיננטות של (v,w) ושל (v,w') זהות. ואמנם, $\det(v,w)=ad-bc$, ואילו $\det(v,w')=a(d+\lambda c)-(b+\lambda a)c=ad+\lambda ac-bc-\lambda ac=ad-bc$.
אנחנו בדקנו עתה כי נוסחת הדטרמיננטה לשטח מקבילית (v,w) שקולה לנוסחה דומה עבור (v,w').
כעת אנחנו יכולים קודם כל לבחור λ כך שהוקטור w יהיה מקביל לציר ה- x, ואחר-כך, בדרך דומה, להפוך v לוקטור המקביל לציר ה- y. במקרה זה נוסחת הדטרמיננטה ניתנת לבדיקה מיידית.

הערה. נהוג לחשוב כי השטח הוא תמיד חיובי (או אפס). בהתאם לכיוון הוקטורים v ו- w

הדטרמיננטה תהיה חיובית או שלילית. זה מקור לסימן "ערך מוחלט" בנוסחה
$$S = |\det(v,w)|$$
כאשר S הוא שטח המקבילית הנוצרת ע"י שני הוקטורים v, w ו- (v,w) מטריצה בה בעמודה הראשונה קואורדינאטות של v ובעמודה השניה – קואורדינאטות של w.

3. תכונות של דטרמיננטה 2×2.

- לינאריות לפי שני הארגומנטים: $$\begin{aligned}&\det(v+v',w)=\det(v,w)+\det(v',w)\\&\det(cv,w)=c\det(v,w)\\&\det(v,w+w')=\det(v,w)+\det(v,w')\\&\det(v,cw)=c\det(v,w)\end{aligned}$$.
- "אנטי-סימטריות": $\det(v,v)=0$.
- "אמת מידה" $\det\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}=1$.

תכונות דומות יגדירו מושג שלדטרמיננטה במקרה כללי.

4. הגדרה של דטרמיננטה: מקרה כללי.

יהי k שדה. אנחנו נתאים לכל מטריצה $n\times n$ איבר ב- k הנקרא *דטרמיננטה* של המטריצה. זה יתן לנו העתקה
$$\det : Mat_n(k)\to k.$$

יהיה נוח לנו לרשום מטריצה כסדרה של עמודות: $A=(v_1,\dots,v_n)$, כך ש- $v_i\in k^n$.
להלן תכונות הפונקציה $\det$:

1. ליניאריות לפי כל אחד מהארגומנטים (הפונקציה מעבירה סכום לסכום):
$\det(v_1,\dots,v_i+v_i',\dots,v_n)=\det(v_1,\dots,v_i,\dots,v_n)+\det(v_1,\dots,v_i',\dots,v_n)$.
2. ליניאריות לפי כל אחד מהארגומנטים (הפונקציה שומרת על כפל בסקלר):
$\det(v_1,\cdots,cv_i,\cdots,v_n)=c\det(v_1,\cdots,v_i,\cdots,v_n)$.
3. אנטי-סימטריות: $\det(v_1,\dots,v_n)=0$ אם קיימים $i\neq j$: $v_i=v_j$.
4. $\det(I)=1$ כאשר I מטריצת היחידה.

5. משפט. הפונקציה $\det : Mat_n(k)\to k$ המקיימת את התכונות **1-3** דלעיל, קיימת ויחידה.

את קיום הדטרמיננטה אנחנו נוכיח בהמשך. כעת אנחנו נבין איך לחשב אותה בהנחה שהיא קיימת.

6. תכונות של דטרמיננטה (מסקנות ההגדרה).

יהיו $e_1,\dots,e_n \in k^n$ וקטורי הבסיס הסטנדרטי, כך ש - $e_i = \begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$ (הרכיב ה- i שווה ל-1, שאר

הרכיבים - 0). למשל, $I = (e_1,\dots,e_n)$, כך שצריך להתקיים $\det(e_1,\dots,e_n)=1$ לפי תכונה 3.
נתבונן בתכונה 2.

למה. תהי A' המטריצה המתקבלת ממטריצה A ע"י החלפת שתי עמודות. אזי $\det A' = -\det A$.
הוכחה. תהי $A=(v_1,\dots,v_n)$ ואילו A' מתקבלת מ- A ע"י החלפת עמודות i ו- j .
נגדיר $B=(\dots,v_i+v_j,\dots,v_i+v_j,\dots)$ (רק מקומות i ו- j מסומנים, בשאר המקומות נמצאים הרכיבים של A המקוריים). אזי לפי תכונות 2 ו-1 מקבלים:

$$0=\det B=\det A+\det A'+\det(\dots,v_i,\dots,v_i,\dots)+\det(\dots,v_j,\dots,v_j,\dots)=\det A+\det A' .$$

זה מוכיח את הלמה.

כעת אנחנו יכולים לחשב כל דטרמיננטה:
נניח $v_i=\sum a_{ji}e_j$. אז תכונה 1 קובעת כי

$$\det(A)=\sum_{j_1,\dots,j_n} a_{j_1 1}a_{j_2 2}\dots a_{j_n n}\det(e_{j_1},\dots,e_{j_n}) .$$

לבסוף, הלמה (שנובעת בסופו של דבר מתכונה 2) אומרת כי $\det(e_{j_1},\dots,e_{j_n})$ שווה ל- 0 אם בין המספרים $j_1,\dots,j_n$ ישנם מספרים זהים; אחרת היא שווה ל- ± 1, בהתאם למספר החלפות עמודות שצריך לבצע עם הסדרה $e_{j_1},\dots,e_{j_n}$ כדי לקבל אותה בסדר תקני $e_1,\dots,e_n$.

דוגמה. נחשב $\det(A)$ כאשר $A=\begin{pmatrix}101\\010\\001\end{pmatrix}$. לפי הנוסחה,

$$\det(A)=\det(e_1,e_2,e_1)+\det(e_1,e_2,e_3)=1 .$$

6. היחידות כבר הוכחה!
זה נובע מכך שלכל מטריצה שיקולים דלעיל קובעים מהו ערך הדטרמיננטה שלה – בהנחה שפונקצית הדטרמיננטה אכן קיימת.

7. מטריצות מונומיאליות. תמורות.

בסעיפים הקודמים ראינו כי יש חשיבות רבה בחישוב דטרמיננטות למטריצות בעלות הצורה $A=(e_{i_1},\dots,e_{i_n})$. מטריצות אלו בנויות מעמודות $e_1,\dots,e_n$ של מטריצת היחידה, **אך בסדר אחר.**
למטריצות מסוג זה קוראים **מטריצות מונומיאליות** (monomial matrices) .
מטריצה מונומיאלית מוגדרת באופן חד-משמעי ע"י סדר $(i_1,\dots,i_n)$ בו מופיעים האינדקסים של העמודות e_i .

הגדרה. סדרת מספרים $(i_1,\dots,i_n)$ נקראת **תמורה** (או n- תמורה אם רוצים להדגיש מספר איברים בה) אם כל המספרים i_k – שלמים בין 1 ל- n
<u>וכל אחד מופיע פעם אחת בלבד.</u>

הערה. בקורס "אלגברה מודרנית" אתם תלמדו הגדרה "יותר מלומדת" של תמורות.

סימון. אוסף n- תמורות מסמנים ב - S_n . התמורה $(1,2,\dots,n)$ נקראת <u>תמורת היחידה</u> ומסומנת כ- 1 : $1\in S_n$.

אם $s=(s_1,\dots,s_n)\in S_n$, אנחנו יכולים לקבל תמורה חדשה ע"י החלפת רכיבים מס' i ו- j . המטרה שלנו היא להבין איך לספור כמה החלפות כאלה צריך לעשות כדי לקבל תמורה נתונה $s\in S_n$ מתמורת היחידה $1\in S_n$. ושאלה חשובה מאוד: האם מספר החלפות זה יחיד את שהוא תלוי בסדר בו אנו מבצעים את ההחלפות.

דוגמה. יהי $s=(3,2,1)$. הנה שלוש דרכים שונות לקבל מ- s את $1\in S_3$.

- להחליף רכיבים 1 ו-3.
- קודם כל להחליף רכיבים 1 ו- 2, אחר-כך 2 ו-3 , אחר-כך שוב 1 ו-2.
- קודם כל להחליף רכיבים 2 ו-3, אחר-כך 1 ו-2 , אחר-כך שוב 2 ו-3.

בדרך ראשונה עשינו החלפה אחת, ובדרך שניה ושלישית – שלוש החלפות.

<u>אנחנו רואים כי מספר ההחלפות לא חייב להישמר אך **זוגיותו** נשמרת.</u>

לתכונה זו משמעות מכרעת לקיומה של דטרמיננטה.

8. אורך של תמורה. סימן של תמורה.

בסעיף זה נוכיח כי מה שצפינו בדוגמה, זה לא מקרי: עבור תמורה $s\in S_n$ נתונה אחת משתי הטענות הבאות מתקיימת:

- כל הדרכים להפוך את s לתמורת היחידה ע"י החלפות הן באורך זוגי.
- כל הדרכים להפוך את s לתמורת היחידה ע"י החלפות הן באורך אי-זוגי.

קודם כל,

הדגרה. תהי $s=(s_1,\dots,s_n)\in S_n$. אורך של s (הסימון: $\ell(s)$) הוא מספר זוגות $1\le i<j\le n$ המקיימות את התכונה $s_i>s_j$ (לפעמים אומרים: מספר אי-סדרים).

למשל, $\ell(1)=0$. $\ell(3,2,1)=3$.

תרגיל. מהו אורך מכסימאלי של תמורה ב- S_n ?

מה תועלת של הגדרה זו? אנחנו עכשיו נבדוק כי כאשר עושים החלפת שני איברים בתמורה, אורכה משתנה ב-1 (עולה או יורד). זו יוכיח כי אם האורך של s זוגי, מספר החלפות נחוצות כדי להפוך את s ל-1 בהכרח זוגי, ואם האורך אי-זוגי, מספר ההחלפות אי-זוגי.
ובכן,

משפט. תהי $s=(s_1,\dots,s_n)\in S_n$, ותהי t תמורה המתקבלת מ- s ע"י החלפת איברים מס' i ו- j . אזי $\ell(t)-\ell(s)$ הוא מספר אי-זוגי.

הוכחה.

1. נבדוק קודם כל מקרה פרטי: $j=i+1$ (מחליפים רכיבים שכנים).

עלינו לספור אי-סדרים של t . פרט לזוג (s_i,s_{i+1}) לא השתנה דבר: זוג (s_k,s_l) שהיה אי-סדר נשאר אי-סדר, וזוג שלא היה, ממשיך לא להיות אי-סדר. לעומת זאת, הזוג (s_i,s_{i+1}) החליף את

תכונותיו: אם היה אי-סדר – הפסיק להיות כזה, ואילו אם לא היה – נהיה לאי-סדר.
זה מוכיח כי במקרה זה $\ell(t)=\ell(s)\pm 1$.

2. <u>מקרה כללי.</u> אנו מניחים כי $i<j$. אפשר לבצע החלפת שורות i ו- j בשלבים:
קודם כל מעבירים רכיב i ימינה על למקום שמאחורי j – זה דורש $j-i$ צעדים.
אחר-כך מעבירים את j (הוא נמצא כעת במקום ה- $j-1$) למקום ה- i – זה דורש עוד $j-i-1$ צעדים.
בסך הכל עשינו מספר אי-זוגי של צעדים ובכל אחד הוספנו או החסרנו 1 .
זה מוכיח כי אורך התמורה השתנה למספר זוגי.

הגדרה-סימון. עבור $s\in S_n$ אנחנו מגדירים <u>סימן של</u> s כ- $+1$ אם $\ell(s)$ זוגי,
ו- -1 כאשר $\ell(s)$ אי-זוגי. הסימון: $\operatorname{sgn}(s)$. במלים אחרות, $\operatorname{sgn}(s)=(-1)^{\ell(s)}$.
תמורה s נקראת זוגית אם $\ell(s)$ זוגי או, במלים אחרות, אם $\operatorname{sgn}(s)=1$.
תמורה s נקראת אי-זוגית אם $\ell(s)$ אי-זוגי או, במלים אחרות, אם $\operatorname{sgn}(s)=-1$.

כמסקנה מהמשפט הקודם אנחנו מקבלים כי אם s זוגית, אז אורך כל דרך המביאה את s לתמורת זהות 1 בהכרח זוגי, ואם s אי-זוגית, אז האורך בהכרח אי-זוגי.

.

9. נוסחה מפורשת לדטרמיננטה.

תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה $n\times n$. נשתמש בסימון $A=(v_1,\dots,v_n)$ כאשר $v_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}e_i$.
אנחנו מקבלים

$$\det A=\sum_{s\in S_n}a_{s_1 1}a_{s_2 2}\dots a_{s_n n}\det(e_{s_1},\dots,e_{s_n})=\sum_{s\in S_n}\operatorname{sgn}(s)a_{s_1 1}\dots a_{s_n n}.$$

נוסחה זו כה חשובה, שיש טעם לחזור עליה:

$$\det A=\sum_{s\in S_n}\operatorname{sgn}(s)a_{s_1 1}\dots a_{s_n n}.$$

<u>יש לציין כי עדין לא הוכחנו את קיום הדטרמיננטה!</u>

10. קיום הדטרמיננטה.

מה חסר לנו כדי להוכיח את הקיום? הרי כבר נוסחה מפורשת יש לנו! האמת היא שלמרות שיש לנו נוסחה מפורשת, עוד לא בדקנו שהיא מקיימת את האכסיומות של דטרמיננטה – ליניאריות לפי כל אחד מן הארגומנטים, אנטי-סימטריות, ואכסיומת היחידה.

כל האכסיומות האלו ניתן להוכיח ישירות על סמך הנוסחה המפורשת (תוכיחו לבד כי $\det(I)=1$ **!**).
אנחנו נלך בדרך אחרת – נניח כי הוכחנו קיום דטרמיננטה עבור מטריצות $n\times n$, ונסיק מזה קיומה עבור $(n+1)\times(n+1)$.

מקרה $n=1$.
אם $A=(a)$, אנו מניחים, בודאי, $\det A=a$.
כל האכסיומות מתקיימות באופן מיידי (תסבירו מדוע!)

מעבר $n\Rightarrow n+1$.
נניח הוכחנו קיומה של פונקציה $\det:Mat_n(k)\to k$ המקיימת את האכסיומות הידועות.

אני אגדיר עכשיו פונקציה $\det : Mat_{n+1}(k) \to k$ ואוכיח עבורה את האכסיומות.

אנחנו נצטרך עוד סימון.
סימון. תהי $A = (a_{ij})$ מטריצה ריבועית ויהיו r, s שני מספרים.
אנחנו נסמן ב- A^{rs} מטריצה המתקבלת מ- A ע"י מחיקת שורה מס' r ועמודה מס' s .
נציין כי אם A מטריצה $(n+1)\times(n+1)$, אזי A^{rs} מטריצה $n\times n$.

<u>הגדרה</u>. נגדיר דטרמיננטה של מטריצה $(n+1)\times(n+1)$ ע"י הנוסחה

$$\det(A) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{1+r} a_{1r} \det(A^{1r}) .$$

בדיקת האכסיומות עבור $n+1$.

א. <u>ליניאריות לפי עמודה מספר</u> i.

תהי $A = (a_{ij}) \in Mat_{n+1}(k)$ ונניח כי לכל r $a_{ri} = a'_{ri} + a''_{ri}$ (עמודה $v_i = \sum a_{ri}e_r$ היא סכום שתי עמודות, $v'_i = \sum a'_{ri}e_r$ ו- $v''_i = \sum a''_{ri}e_r$. יהיו A' ו- A'' המטריצות המתקבלות מ- A ע"י החלפת עמודה i ב- v'_i וב- v''_i . עלינו לבדוק כי $\det A = \det A' + \det A''$.

ואמנם, לפי הנוסחה,

$$\det A = \sum_{r=1}^{n+1} (-1)^{1+r} a_{1r} \det A^{1r} = (-1)^{1+i}(a'_{1i} + a''_{1i}) \det A^{1i} + \sum_{r\neq i} (-1)^{1+r} a_{1r} \det A^{1r} .$$

לפי הנחת האינדוקציה, $\det$ מקיימת את האכסיומות על מטריצות $n\times n$. בפרט,

$$\det A^{1r} = \det A'^{1r} + \det A''^{1r} ,$$

וזה נותן

$$\det A = (-1)^{1+i}(a'_{1i} + a''_{1i}) \det A^{1i} + \sum_{r\neq i} (-1)^{1+r} a_{1r} \det A^{1r} = \det A' + \det A'' .$$

ב. <u>אנטי-סימטריות.</u>

נניח במטריצה $A = (v_1, \ldots, v_{n+1})$ שתי עמודות זהות: $v_i = v_j$. עבור כל $r \neq i, j$

מתקיים $\det A^{1r} = 0$ כי למטריצה A^{1r} שתי עמודות זהות (והיא מטריצה $n\times n$).
לכן,

$$\det A = (-1)^{1+i} a_{1i} \det A^{1i} + (-1)^{1+j} a_{1j} \det A^{1j} .$$

נזכיר כי $a_{1i} = a_{1j}$. גם המטריצות A^{1i} ו- A^{1j} "כמעט אותו דבר": A^{1i} מתקבלת מ- A^{1j} ע"י העברת עמודה מס' i למקום מס' $j-1$. כדי לעשות זאת, צריך $j-i-1$ החלפות עמודות, כך ש- $\det A^{1i} = (-1)^{j-i-1} \det A^{1j}$. ביחד עם הנוסחה הקודמת זה נותן $\det A = 0$.

3. <u>אכסיומת היחידה</u>. זה מידי: $\det(I_{n+1}) = 1\cdot \det(I_n) = 1$. כאן (באופן חריג) אנו מסמנים I_n, I_{n+1} מטריצות היחידה ב- Mat_n, Mat_{n+1}.

<u>קיום הפונקציה $\det : Mat_n(k) \to k$ המקיימת את התכונות 1-3 הוכח</u>.
יש לציין כי בו-זמנית מצאנו דרך נוספת לחישוב דטרמיננטה – פיתוח לפי השורה הראשונה.
על תכונות של דטרמיננטה ועל דרכים אחרות לחישובה נדבר בהרצאות הבאות.