פונקציה מעריכית של אופרטור

$k=\mathbb{R},\mathbb{C}$.

1. אם A מטריצה, נגדיר

$$e^A = 1 + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

אפשר להוכיח כי הטור מתכנס לכל A. הנה כמה דוגמאות

2. דוגמא. אם A אלכסונית, $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

אז $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ כך ש- $e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

בינתיים לא כל כך מעניין.

2' דוגמא. אם $A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{A_n} \end{pmatrix}$ מטריצת תאים אז

גם e^A מטריצת תאים ומתקיים $e^A = \begin{pmatrix} \boxed{e^{A_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{e^{A_n}} \end{pmatrix}$.

3. תכונות ראשונות: e^{A+B}

נניח כי $AB=BA$. אז

- בינום של Newton $\quad (A+B)^n = \sum \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$

ולכן

$$e^{A+B} = \sum \frac{1}{n!}(A+B)^n = \sum \frac{1}{n!}\binom{n}{k} A^k B^{n-k} =$$

$$= \sum_{n=k+\ell} \frac{1}{n!} \frac{\cancel{k!\,\ell!}}{1} \frac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!} A^k B^\ell = \sum_k \frac{1}{k!}A^k \cdot \sum_\ell \frac{1}{\ell!} B^\ell = e^A e^B$$

4. <u>עוד תכונות</u> אם $B=C^{-1}AC$ אזי

$$B^n = C^{-1}ACC^{-1}AC\dots C^{-1}AC = C^{-1}A^nC$$

כך שמתקיים

$$e^B = \sum \frac{1}{n!}B^n = C^{-1}\sum\frac{1}{n!}A^n C = C^{-1}e^A C$$

5. $\det e^A$

<u>משפט</u> $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$

<u>הוכחה</u>

אם $B=C^{-1}AC$ צורת Jordan, אזי $e^B = C^{-1}e^A C$ לכן

$$\begin{cases}\det e^B = \det e^A \\ \operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(A\end{cases}$$

כך שמספיק לבדוק את המשפט עבור B משולשית עליונה.

אם B משולשית עליונה, כל החזקות B^n גם כן משולשיות עליונות, כך שגם e^B משולשית עליונה. עכשיו הבדיקה קלה:

$$e^B = \begin{pmatrix} e^{b_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{b_n}\end{pmatrix} \Leftarrow B^k = \begin{pmatrix} b_1^k & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n^k\end{pmatrix} \Leftarrow B = \begin{pmatrix} b_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n\end{pmatrix}$$

לכן $\det e^B = \prod_{i=1}^n e^{b_i} = e^{\sum_{i=1}^n b_i}$ ואילו $\operatorname{tr}(B) = \sum_{i=1}^n b_i$

המשפט הוכח.

עוד טענה פשוטה מאוד

<u>למה</u> $B=A^t \Rightarrow e^B=(e^A)^t$.

<u>הוכחה</u>: $B^n=\underbrace{A^t\cdots A^t}_{n}=(\underbrace{A\cdots A}_{n})^t=(A^n)^t$, זה הכל.

<u>מסקנה</u> תהי $\overbrace{\text{}}^{(k=\mathbb{R})}$ A מטריצה אנטי-סימטרית: $A^t=-A$.
אזי e^A - מטריצה אורתוגונלית.

<u>הוכחה</u> $A+A^t=0 \Rightarrow e^A\cdot e^{A^t}=I$

$\Rightarrow (e^A)(e^A)^t=I$.

<u>משפט</u> תהי B מטריצה אורתוגונלית, $\det B=1$. אזי קיימת
מטריצה A אנטי-סימטרית כך ש- $B=e^A$.

<u>הוכחה</u>

לפי משפט המיון של מטריצות אורתוגונליות $B=C^{-1}B'C$
כאשר B' מטריצת תא'ים

$$B'=\begin{pmatrix}B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_K\end{pmatrix}$$

עם התא'ים B_i או 1, או -1, או $\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$.
כיוון ש $\det B=1$, מספר תא'ים $=-1$ זוגי, כך שאפשר
לאחד אותם בזוגות ולהשתמש בשוויון

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\pi & -\sin\pi\\ \sin\pi & \cos\pi\end{pmatrix}.$$

לכן אפשר להניח כי B מטריצת תאים $\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$.
לכן, כדי להוכיח את המשפט מספיק להציג את התא
הנ"ל בצורה e^A, $A=\begin{pmatrix}0 & -t\\ t & 0\end{pmatrix}$.

החישוב הבא מראה כי:

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix}0 & -\varphi\\ \varphi & 0\end{pmatrix}}.$$

<u>חישוב של e^A, $A=\begin{pmatrix}0 & -\varphi\\ \varphi & 0\end{pmatrix}$.</u>

הערכים העצמיים של A:

$$\det\begin{pmatrix}-\lambda & -\varphi\\ \varphi & -\lambda\end{pmatrix} = \lambda^2+\varphi^2$$

$$\lambda_{1,2}=\pm i\varphi$$

הוקטורים העצמיים:

① $\lambda=i\varphi$

$$\begin{pmatrix}0 & -\varphi\\ \varphi & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = i\varphi\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$-\varphi y = i\varphi x$$
$$y=-ix$$
$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$$

② $\lambda=-i\varphi$

$$\begin{pmatrix}0 & -\varphi\\ \varphi & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = -i\varphi\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$y=ix$$
$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$$

(5)

לכן ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\varphi & 0 \\ 0 & -i\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}^{-1}$$

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^A = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & e^{-i\varphi} \\ -ie^{i\varphi} & ie^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}) & -(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}) \\ e^{i\varphi}-e^{-i\varphi} & i(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

כאן אנחנו השתמשנו בנוסחאות

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$
$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

זהו סוף החישוב