(1)

מכפלה פנימית - מקרה מרוכב

0. במקרה ממשי תבניות מוגדרות חיובית היו טובות במיוחד:
- אם תבנית כזאת מוגדרת על מרחב V,

$$B: V\times V \to \mathbb{R}$$

- צמצום שלה על כל תת-מרחב $W\subseteq V$ גם כן חיובית, לכן בלתי-מנוונת.

- ערך $B(v,v)$ על כל וקטור $v\neq 0$ חיובי, בפרט, שונה מאפס, לכן תהליך של אורתוגונליזציה פשוט במיוחד

- מאפשר לדבר על מרחקים, זוויות וכו' - להשתמש בשפה גיאומטרית.

מושג של תבנית חיובית אי-אפשר להרחיב למקרה של שדה המרוכבים: אם $B:V\times V \to \mathbb{C}$ תבנית דו-לינארית על מרחב וקטורי מרוכב V, מתקיים

$$B(iv, iv) = i^2 B(v,v) = -B(v,v)$$

לכן התנאי $B(v,v)>0$ לכל $v\in V$ בלתי-אפשרי.

1. למרות האמור, יש הכללה מאוד חשובה של מושג המכפלה הפנימית למרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{C}$ - אך היא קצת אחרת. התבניות יהיו פה לינאריות לפי ארגומנט אחד, ואנטי-לינאריות לפי ארגומנט שני.

הגדרה: יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{C}$.

העתקה $f: V \to W$ נקראת אנטי-לינארית (חצי-לינארית) אם:

- $f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2)$
- $f(cv) = \bar{c} f(v)$

כאשר עבור $c=a+bi$ מספר מרוכב, $\bar{c} = a-bi$.

<u>תרגיל</u>: בדקו כי הרכבה של העתקה לינארית עם העתקה אנטי-לינארית היא אנטי-לינארית. בדקו כי הרכבת שתי העתקות אנטי-לינאריות היא העתקה לינארית.

<u>הגדרה</u> העתקה $B: V\times V \to \mathbb{C}$ נקראת תבנית הרמיטית (Hermite) אם

(1) B לינארית לפי הארגומנט השני:

$$B(v, w_1+w_2) = B(v,w_1)+B(v,w_2)$$
$$B(v, cw) = c B(v,w)$$

(2) B אנטי-לינארית לפי הארגומנט הראשון:

$$B(v_1+v_2, w) = B(v_1,w)+B(v_2,w)$$
$$B(cv, w) = \bar{c} B(v,w)$$

(3) B "סימטרית" (בדרך עקומה)

$$B(w,v) = \overline{B(v,w)}$$

<u>הערה</u>: $(1)+(3) \Rightarrow (2)$

$(2)+(3) \Rightarrow (1)$

למשל, אם B לינארית לפי w, וסימטרית כמו ב-(3),

$$B(cv,w) = \overline{B(w,cv)} = \overline{cB(w,v)} = \bar{c}\,\overline{B(w,v)} = \bar{c}B(v,w)$$

שאר ההוכחות בדרך דומה.

③

$$B: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

נקראת הרמיטית מוגדרת חיובית או מכפלה פנימית אם

$B(v,v) > 0$ לכל $v \neq 0$.

הערה: אם B הרמיטית, $B(v,v) = \overline{B(v,v)}$, לכן $B(v,v) \in \mathbb{R}$.

דוגמא (מכפלה פנימית "סטנדרטית")

יהי $V = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1, \dots, e_n\}$. לשני וקטורים

$$v = \sum c_i e_i, \quad w = \sum d_i e_i$$

נגדיר

$$B(v,w) = \sum \overline{c_i} d_i$$

קל לראות כי זוהי תבנית הרמיטית מוגדרת חיובית.

הגדרה יהי B מכפלה פנימית. בסיס $\{v_1, \dots, v_n\}$ נקרא בסיס אורתוגונלי אם $B(v_i, v_j) = 0$ עבור $i \neq j$.
בסיס נקרא אורתונורמלי אם בנוסף $B(v_i, v_i) = 1$.

אם $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס אורתוגונלי אז

$$e_i = \frac{v_i}{\sqrt{B(v_i, v_i)}}$$ מהווים בסיס אורתונורמלי!

4

מטריצה מייצגת

תהי B תבנית הרמיטית ב-V, $v_1,\dots,v_n$ בסיס ב-V.
נגדיר מטריצה

$$\tilde{B} = (b_{ij})$$

$$b_{ij} = B(v_i, v_j)$$

אם $v = \sum c_i v_i$, $w = \sum d_i v_i$ אז,

$$B(v,w) = B\left(\sum c_i v_i, \sum d_i v_i\right) = \sum \overline{c_i} d_j B(v_i, v_j)$$

$$= \sum_{i,j} \overline{c_i} \cdot b_{ij} \cdot d_j$$

נוח להגדיר פעולה $*$ על מטריצות עם רכיבים מרוכבים

$A \in Mat_{m,n}(\mathbb{C})$ $\quad A = (a_{ij})$

$\Leftarrow$ $\quad A^* = (a^*_{ij})$, $A^* \in Mat_{n,m}(\mathbb{C})$

על ידי: $\quad a^*_{ij} = \overline{a_{ji}}$

למשל, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ נותן $c^* = (\overline{c_1}, \dots, \overline{c_n})$.

עכשיו אפשר לרשום

$$B(v,w) = c^* \cdot \tilde{B} \cdot d$$

כאשר $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ עמודות מקדמים של וקטורים v, w.

גם המטריצה המייצגת $\tilde{B}$ בעצמה מקיימת תכונה

$$\tilde{B}^* = \tilde{B}$$

כי זה פשוט אומר כי $b_{ij} = \overline{b_{ji}}$ i/c $B(v_i, v_j) = \overline{B(v_j, v_i)}$

<u>משפט</u> (הוכחה כמו במקרה הממשי)

תהי $\tilde{B}$ מטריצה מייצגת של תבנית הרמיטית B.
אזי B מוגדרת חיובית אם ורק אם כל המינורים

$$\Delta_i = \det \begin{vmatrix} b_{11} \dots & b_{1i} \\ \vdots & \\ b_{i1} & b_{ii} \end{vmatrix} > 0$$

<u>תהליך גרם-שמידט (Gram-Schmidt):</u>

בדיוק כמו במקרה הממשי, תהליך גרם-שמידט מאפשר לבנות בסיס אורתוגונלי מכל בסיס:

תהי B מכפלה פנימית על V, $v_1, \dots, v_n$ - בסיס ב-V.
נבנה בסיס חדש $w_1, \dots, w_n$ בעזרת נוסחת נסיגה

$$W_1 = V_1$$

$$W_K = V_K - \sum \frac{B(W_i, V_K)}{B(W_i, W_i)} W_i$$

$k = 2, \dots, n$

נקבל בסיס אורתוגונלי.

<u>הוכחה</u> אנחנו נוכיח באינדוקציה כי

(א) לכל i $\mathrm{Span}\{v_1,\dots,v_i\} = \mathrm{Span}\{w_1,\dots,w_i\}$

(ב) $w_1,\dots,w_i$ ניצבים זה לזה: $B(w_k,w_j)=0$ עבור $i \geq k \neq j$

עבור $i=1$ אין מה להוכיח.
נניח כי הטענה נכונה עבור $i=k-1$. נחפש w_k בצורה

$$w_k = v_k - \sum \lambda_i w_i$$

כך שיתקיים $B(w_i,w_k)=0$. מתקיים

$$0 = B(w_i,w_k) = B(w_i,v_k) - \sum_j \lambda_j B(w_i,w_j) =$$

$$= B(w_i,v_k) - \lambda_i B(w_i,w_i)$$

לכן, הפתרון היחיד למערכת משוואות $\lambda_i = \frac{B(w_i,v_k)}{B(w_i,w_i)}$.

זה מוכיח את התכונה (ב) עבור $i=k$. תכונה (א) נובעת מהעובדה

$$\mathrm{Span}\{v_1,\dots,v_{k-1}\} = \mathrm{Span}\{w_1,\dots,w_{k-1}\}$$

~~ומכך שאפשר לבטא w_k דרך v_k ...~~

ומכך שההפרש $w_k - v_k$ שייך ל$\mathrm{Span}\{w_1,\dots,w_{k-1}\} = \mathrm{Span}\{v_1,\dots,v_{k-1}\}$.

זהו סוף ההוכחה.

(7)

אופרטורים אוניטריים (unitary).

תהי B מכפלה פנימית על מ.ו. V מעל $\mathbb{C}$.
אופרטור $f:V\to V$ נקרא אוניטרי אם

$$B(v,w)=B(f(v),f(w))$$

(זו הכללה של מושג אופרטור אורתוגונלי במקרה ממשי).

אם $\{e_1,\dots,e_n\}$ בסיס אורתונורמלי עבור B, f אוניטרי אם ורק אם $f(e_1),\dots,f(e_n)$ בסיס אורתונורמלי. במלים אחרות,

מטריצה של אופרטור אוניטרי בבסיס אורתונורמלי היא זאת שמקיימת את התכונות הבאות:

$$A=(a_{ij})$$

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{a}_{ki}\,a_{ki}=1 \quad \text{לכל } k \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{a}_{ki}\,a_{\ell i}=0 \quad \text{לכל } k\neq \ell \qquad (2)$$

נזכיר כי מטריצה A אורתוגונלית אם

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ki}^{2}=1 \quad \text{לכל } k \qquad (\text{אורת-}1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ki}\cdot a_{\ell i}=0 \quad \text{לכל } k\neq \ell \qquad (\text{אורת-}2)$$

(8)

אפשר לרשום את התכונות הנ"ל בעזרת נוסחא אחת:

A אוניטרית אם

$$\boxed{A^*A = I}$$

(נזכיר כי A אורתוגונלית אם $A^tA=I$).

~~הגדרה: אוסף מטריצות אוניטריות~~

דוגמא: מטריצה 1×1, זאת אומרת, מספר מרוכב, היא אוניטרית אם $\bar{a}\cdot a = 1$.

במלים אחרות, $|a|=1$.

סימון: אוסף מטריצות אוניטריות $n\times n$ הוא U_n.

זאת חבורה: אם A,B אוניטריות, אז A^{-1} אוניטרית וגם $A\cdot B$ אוניטרית.

ראינו כי U_1 ~~...~~ היא חבורה של מספרים מרוכבים בעלי ערך מוחלט $=1$.

משפט: יהי $f:V\to V$ אופרטור אוניטרי. קיים בסיס אורתונורמלי בו ל-f צורה אלכסונית.

הוכחה: משפט זה דומה מאוד (אך טיפה יותר פשוט) למשפט על צורה קאנונית של אופרטור אורתוגונלי.

יהי λ ערך עצמי של f ויהי v וקטור עצמי עם ערך עצמי λ. נגדיר $W=\mathrm{Span}\{v\}^\perp$ ונקבל

$$V=\mathrm{Span}\{v\}\oplus W.$$

9

כמו במקרה הממשי, W תת-מרחב אינווריאנטי של f,
כך שאפשר להמשיך באינדוקציה: כך נמצא בסיס אורתונורמלי
ב-W ונשלים אותו ע"י $v/\sqrt{B(v,v)}$ לבסיס אורתונורמלי ב-V.

<u>הערה:</u> ערכים עצמיים של f הם בעלי $|\lambda|=1$ (נזכיר:
זה גם היה במקרה ממשי). במקרה ממשי בצורה קאנונית
של אופרטור אורתוגונלי היו תאים

$$\boxed{+1}$$

$$\boxed{-1}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \text{-ו}$$

עכשיו הצורה היא אלכסונית (זה יתרון של שדה $\mathbb{C}$)
אבל המספרים על ~~אלכ~~ האלכסון לאו בהכרח ± 1.