<u>שדות ומרחבים וקטוריים: הגדרות</u>

0. מבוא

החלק הראשון של הקורס עסק בפתרון מערכות משוואות לינאריות ובפעולות עם מטריצות. שתי פעולות – חיבור עמודות (או שורות) וכפל עמודה בסקלר היו לבסיס לכל מה שעשינו.

קבוצת הסקלרים היתה אחת הקבוצות בהן אפשר לבצע פולות חיבור, כפל וחילוק: יכולנו להשתמש במספרים ממשיים, רציונליים או אפילו במספרים מרוכבים. הגיע זמן לפרט מה בדיוק אנו רוצים מקבוצת הסקלרים. זה מביא אותנו למושג *שדה*, כך שאוסף המספרים הרציונליים Q, הממשיים R, המרוכבים C – הם דוגמאות של שדות.

הנושא השני של פרק זה – מושג כללי של מרחב וקטורי. אנחנו כבר למדנו דוגמאות של מרחב וקטורי, למשל, אוסף עמודות $Col(n)$ שאפשר בו לחבר איברים ולהכפילם בסקלר. עכשיו ניתן הגדרה כללית של מושג זה.

מושג של מרחב וקטורי הוא המושג העיקרי של אלגברה לינארית.

1. שדה.

שדה הוא קבוצה F עם שני איברי F המסומנים ב- 0 ו- 1, שמוגדרות בה פעולות חיבור וכפל המקיימות רשימה ארוכה של תכונות.
הנה הרשימה.

1. תכונות של חיבור:
   - (חוק קיבוץ) לכל $x, y, z \in F$ מתקיים $(x+y)+z = x+(y+z)$.
   - (חוק חילוף) לכל $x, y \in F$ מתקיים $x+y = y+x$
   - (תכונה של 0) לכל $x \in F$ מתקיים $x+0 = x$.
   - (קיום איבר נגדי) לכל $x \in F$ קיים $y \in F$ המקיים $x+y=0$.
2. תכונות של כפל:
   - (חוק קיבוץ) לכל $x, y, z \in F$ מתקיים $(xy)z = x(yz)$.
   - (חוק חילוף) לכל $x, y \in F$ מתקיים $xy = yx$
   - (תכונה של 1) לכל $x \in F$ מתקיים $x \cdot 1 = x$.
   - (קיום איבר הפכי) לכל $0 \neq x \in F$ קיים $y \in F$ המקיים $xy = 1$.
3. התכונה המקשרת חיבור עם כפל:
   - (חוק פילוג) לכל $x, y, z \in F$ מתקיים $x(y+z) = xy + xz$.

כל החוקים המפורטים מעלה מוכרים לנו. אך צריך מאמץ לא קטן להבין שאלה בדיוק התכונות שאנו משתמשים כדי לבצע כל פעולות עם מספרים. כדי לעכל את זה, אנחנו צריכים קצת "לשחק" עם ההגדרה – להסיק ממנה כמה מסקנות מיידיות.

2. תכונות מיידיות.

- חוק קיבוץ אומר כי אם יש שלושה איברים x, y, z , אפשר לחשב (להגדיר) את הסכום שלהם, $x+y+z$ בשתי דרכים שנותנות אותה תוצאה: קודם לחבר $x+y$ ואחר-כך להוסיף z, או קודם לחבר $y+z$, ולהוסיף את התוצאה ל- x . חוק זה גורר כי סכום של כל מספר המחוברים לא תלוי בסדר הפעולות. למשל,
  $((x+y)+z)+t = (x+y)+(z+t) = x+(y+(z+t))$.

- כנ"ל לגבי חוק קיבוץ עבור כפל.

- איבר נגדי עבור כל $x \in F$ הוא יחיד: כי אם $x+y=0=x+z$ כך שגם y וגם z נגדיים ל- x, אז
$y = y + (x+z) = (y+x) + z = z$.
האיבר הנגדי עבור x מסמנים ב- $-x$.
- כנ"ל לגבי איבר הפכי: עבור כל $0 \neq x \in F$ איבר הפכי ל- x הוא יחיד. אותו מסמנים ב- x^{-1}.
- לכל $x \in F$ ממתקיים $0 \cdot x = 0$. ואמנם, $0x + 0x = (0+0)x = 0x$; אם נחסיר משני האגפים $0x$, נקבל את הנדרש.
- לכל $x \in F$ מתקיים $-x = (-1) \cdot x$. ואמנם,
$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1)x = (1-1)x = 0$.

3. דוגמאות של שדות.

אנחנו יודעים היטב כי אוסף המספרים הרציונליים Q, אוסף המספרים הממשיים R, וגם אוסף המספרים המרוכבים הם שדות.
הנה עוד דוגמה של שדה, קצת שונה ממה שראינו עד כה.
לשדה זה שני איברים בלבד, והם 0 ו- 1. כפל מוגדר על-ידי התכונה של 1: $1 \cdot 1 = 1, 1 \cdot 0 = 0$.
קל לבדוק כי אם נניח $1+1=0$, כל האכסיומות של שדה מתקיימות.
שדה בן שני איברים שהגדרנו מסומן ב- F_2. הוא גם נקרא שדה השאריות מודולו 2 (למה?)

אנחנו נקדיש לשדות עוד זמן מה יותר מאוחר.

4. מרחבים וקטוריים.

בחלק הראשון של הקורס הגדרנו קבוצת העמודות $Col(n)$ באורך n. עכשיו, כשהגדרנו מה הוא שדה, הגיע זמן להודות בכך שלא היינו מדויקים כשהגדרנו $Col(n)$: יש לקבוע מה הוא השדה שממנו אנו לוקחים אך הרכיבים של העמודות. לכן, יותר מדויק, עבור שדה F נתון, לסמן ב- $Col(n,F)$ את אוסף העמודות באורך n עם הרכיבים ב- F. אנחנו נשתמש בסימון כזה רק אם לא ברור לאיזה שדה אנו מתכוונים.

נזכיר כי על אוסף העמודות $Col(n,F)$ מוגדרות שתי פעולות: חיבור וכפל בסקלר (איבר של F).
קבוצה עם שתי פעולות כאלה תיקרא <u>מרחב וקטורי</u>. הנה ההגדרה המתאימה.

<u>**הגדרה**</u>. יהי F שדה. <u>מרחב וקטורי</u> מעל F הוא קבוצה V יחד עם שתי פעולות:
- חיבור, $x, y \in V \Rightarrow x+y \in V$
- כפל בסקלר, $a \in F, x \in V \Rightarrow ax \in V$,

כך שהתכונות המפורטות מטה, מתקיימות:
- חוק קיבוץ: $(x+y)+z = x+(y+z)$
- חוק חילוף: $x+y = y+x$
- (קיום איבר אדיש) קיים $0 \in V$ כך ש- $x+0=x$ לכל $x \in V$.
- (קיום איבר נגדי) לכל $x \in V$ קיים $y \in V$ כך ש- $x+y=0$.

- קיבוץ של כפל בסקלר: $(ab)x = a(bx)$ עבור $a,b \in F, x \in V$.
- $1x = x$ לכל $x \in V$.
- פילוג: $(a+b)x = ax+bx$ עבור $a,b \in F, x \in V$.
- עוד פילוג: $a(x+y) = ax+ay$ עבור $a \in F, x,y \in V$.

הערות.

1. כמו שראינו קודם בהגדרת שדה, איבר אדיש 0, אם קיים, הוא יחיד. לכן, אכסיומת קיום איבר נגדי בעלת משמעות (כי היא מתייחסת לאיבר ה<u>א</u>דיש 0).
2. רשימת האכסיומות דלעיל היא לא הקצרה ביותר.

5. כמה דוגמאות.

אוסף עמודות $Col(n,F)$ ואוסף שורות $Row(n,F)$ מהווים מרחבים וקטוריים מעל שדה F.
באותה מידה אוסף כל המטריצות $m\times n$ מעל F הוא מרחב וקטורי.

דוגמה יותר מעניינת: אוסף פתרונות מערכת משוואות <u>הומוגניות</u>.

עוד דוגמה: אוסף כל הפונקציות על R הוא מרחב וקטורי מעל שדה הממשיים R.
עוד: אוסף הפונקציות הרציפות (גזירות; גזירות אינסוף עמים).