מטריצות – המשך

1. יש להסביר מדוע בהגדרה של מטריצה הפיכה דיברנו רק על מטריצות ריבועיות.
בהמשך למטריצה כללית $A \in Mat_{m,n}$ נגדיר מושגים *הפיכות מימין והפיכות משמאל.*
אנחנו נראה כי אם A הפיכה מימין אז בהכרח $m \le n$. אם A הפיכה משמאל אז בהכרח $m \ge n$. בפרט, כל מטריצה הפיכה משני הצדדים בהכרח ריבועית.
אנחנו נראה גם כי A הפיכה אם ורק אם היא הפיכה גם מימין וגם משמאל.

2. הגדרה. מטריצה A הפיכה מימין אם קיימת מטריצה B כך ש- $AB = I$.
מטריצה A הפיכה משמאל אם קיימת מטריצה B כך ש- $BA = I$.

נציין כי אם $A \in Mat_{m,n}$ ו- $AB = I$ אז בהכרח $B \in Mat_{n,m}$ ו- $I \in Mat_m$.
כמו כן, אם $BA = I$ אז $B \in Mat_{n,m}$ ו- $I \in Mat_n$.

3. עתה נלמד מתי מטריצה הפיכה מימין.
נסמן את העמודות של מטריצת היחידה I ב- $\delta^1, \dots, \delta^m$, כך ש- $\delta_j^{\ i} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \ne j \end{cases}$.
נסמן את העמודות של המטריצה B ב- $x^1, \dots, x^m$. אזי המשוואה המטריציונית $AB = I$ שקולה לאוסף של m משוואות $Ax^k = \delta^k, k = 1, \dots, m$.

4. משפט. *מטריצה A הפיכה מימין אם ורק אם למערכת $Ax = b$ יש פתרון עבור כל $b \in F^m$.*

הוכחה. ראינו כבר כי A הפיכה מימין אם ורק אם למשוואות $Ax = \delta^k$ יש פתרון עבור כל k. לכן, נשאר לוודא כי אם A הפיכה מימין אז לכל משוואה $Ax = b$ יש פתרון.
ואמנם, אם $AB = I$, מקבלים

$$A(Bb) = (AB)b = Ib = b,$$

וזה אומר כי $x = Bb$ הוא פתרון.

5. למה. *אם מטריצות A, B הפיכות, אז גם המכפלה AB הפיכה.*

הוכחה. $AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = I$.

6. משפט. מטריצה $A \in Mat_{m,n}$ הפיכה מימין אם ורק אם $rk(A) = m$.

הוכחה.

צעד ראשון. שיטת גאוס מאפשרת למצוא מטריצות יסוד $E_N, \dots, E_1$ כך שהמכפלה $E_N \dots E_1 A = A'$ מטריצה בצורת מדרגה. אני טוען כי A הפיכה מימין אם ורק אם A' הפיכה מימין. ואמנם, אם $AB = I$ אז $A'(BE_1^{-1} \dots E_N^{-1}) = I$, ובכיוון הנגדי אם $A'B = I$ אז $A(BE_N \dots E_1) = I$. (בדקו את זה בעצמכם!)

צעד שני. עתה, כיוון ש- $rk(A) = rk(A')$, עלינו לבדוק רק שאם A בצורת מדרגה, אז היא הפיכה מימין אמ"מ (ראשי תיבות ל"אם ורק אם") $rk(A) = m$.
לאור המשפט של סעיף 4 עובדה זו ידועה לנו משיטת גאוס.

מסקנה. *אם $A \in Mat_{m,n}$ הפיכה מימין, אז בהכרח $m \le n$.*

הוכחה. מספר שורות השונות מאפס במטריצה A' שבצורת מדרגה קטן או שווה למספר העמודות. לכן, $m \le n$.

7. משפט. A *הפיכה מימין אמ"מ* $CA = 0 \Rightarrow C = 0$ עבור כל מטריצה C *(בעלת* m

עמודות).

הוכחה. אם A הפיכה מימין, קיימת B כך ש- $AB=I$. אזי

$$CA=0 \Rightarrow C=C(AB)=(CA)B=0.$$

זה מוכיח כיוון אחד של הטענה. בכיוון הנגדי, נניח כי A לא הפיכה מימין,זאתת אומרת כי $rk(A)<m$. תהי $EA=A'$ מטריצה מדורגת כאשר E מכפלה של מטריצות יסוד.

לפי הנחתינו, השורה האחרונה של A' היא שורת אפסים. אם נסמן $d=(0,0,\ldots,1)$, זה אומר כי $dA'=0$. אזי

$$0=dA'=d(EA)=(dE)A.$$

אבל dE זאת השורה האחרונה של המטריצה ההפיכה E, לכן היא לא יכולה להיות שווה לאפס. זה מוכיח את המשפט.

8. הפיכות משמאל.

אם $A\in Mat_{m,n}$ הפיכה משמאל, קיימת מטריצה B כך ש- $BA=I$. אזי $B\in Mat_{n,m}$ הפיכה מימין ולכן $m\geq n$.

לכן, אם A הפיכה גם מימין וגם משמאל, אז היא ריבועית. זה גורר מיד כי A הפיכה:

אם $AB=I,\quad CA=I$ אז $C=C(AB)=(CA)B=B$.

יש לציין קריטריון אחר להפיכות משמאל.

9. משפט. *מטריצה A הפיכה משמאל אמ"מ למערכת הומוגנית $Ax=0$ רק פתרון טריוויאלי.*

משפט זה קל להסיק ממשפט שבסעיף 7 בעזרת מעבר ל**מטריות מוחלפות** – ראה הגדרה.

הגדרה. תהי $A\in Mat_{m,n}$. המטריצה המוחלפת של $A=(a_{ij})$ היא המטריצה $A^t\in Mat_{n,m}$, שהרכיב ה- (i,j) שלה שווה ל- a_{ji}.

דוגמה. המטריצה המוחלפת ל- $A=(a_1,\ldots,a_n)$ היא העמודה $A^t=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$.

למה. $(AB)^t=B^tA^t$.

הוכחה: תרגיל פשוט.

הוכחת המשפט. ברור כי מטריצה A הפיכה משמאל אמ"מ A^t הפיכה מימין. לפי משפט 7 זה שקול לתכונה $CA^t=0\Rightarrow C=0$ עבור כל שורה C. לפי הלמה זה שקול לתכונה $Ax=0\Rightarrow x=0$ לכל עמודה x.

10. שיטת גאוס למציאת המטריצה ההופכית.

תהי $A\in Mat_{m,n}(F)$. כפי שנאמר בסעיף 3, כדי למצוא מטריצה ההופכית מימין ל- A, צריך לפתור m מערכות משוואות $Ax^j=\delta^j$. כדי לפתור אותן בו-זמנית, נרשום מטריצה מורחבת בה לצד מטריצת המקדמים A כתובים כל m עמודות של איברים חופשיים $\delta^1,\ldots,\delta^m$.

כך המטריצה המורחבת שקיבלנו היא בעלת $m+n$ שורות – היא מתקבלת ע"י צירוף של מטריצה I מימין למטריצה A.

עכשיו, כדי לפתור את כל המערכות, עושים פעולות יסוד כך שלבסוף מביאים את המטריצה המורחבת $(A\,|\,I)$ לצורת מדרגה, נגיד, $(A'\,|\,I')$.

עתה אנחנו יכולים לומר האם A הפיכה מימין:

A הפיכה מימין אמ"מ $rk(A)=n$, וזה מתקיים אמ"מ השורה האחרונה של A' שונה מאפס. זה קורה רק כאשר כל איברי האלכסון ב- A' שונים מאפס.
במקרה זה אנחנו יכולים להמשיך לעשות פעולות יסוד כך שלבסוף נביא את A למטריצת היחידה:

- קודם כל נכפיל את השורה האחרונה בסקלר כך שהיא תהפוך לשורה $(00\ldots1)$.
- בעזרת פעולות יסוד $E_{in}(c)$, $i=1,\ldots,n-1$, נאפס את כל הרכיבים בעמודה האחרונה בכל השורות פרט לשורה האחרונה.
- לעבור לשורה ה-$n-1$, וכך הלאה.

בסוף תהליך זה אנחנו מקבלים מטריצה מורחבת בצורה $(I\,|\,B)$.

משפט. במקרה $rk(A)=n$ מטריצה A הפיכה וההופכית שלה היא B .
הוכחה. אם $E_N,\ldots,E_1$ פעולות יסוד המביאות את A למטריצת היחידה,
אז $I=E_N\ldots E_1A$, לכן $A=E_1^{-1}\ldots E_N^{-1}$. זאת מטריצה הפיכה כמכפלה של מטריצות הפיכות. ההופכית שלה היא בוודאי $A^{-1}=E_N\ldots E_1$.

הערה. יש לציין כי (אולי בלי לשים לכך לב) הוכחנו כי אם מטריצה ריבועית הפיכה מימין, אזי היא הפיכה.
תרגיל. הוכיחו כי אם מטריצה ריבועית הפיכה משמאל,
אז היא הפיכה.
רמז : *השתמשו במטריצה מוחלפת.*