מטריצות

1. יהי F שדה (כגון: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$). נזכיר כי מטריצה $m\times n$ מעל F היא טבלה של איברי F בעלת m שורות ו- n עמודות. נהוג לסמן $A=(a_{ij})$ כאשר $a_{ij}\in F$ הוא הרכיב של A הנמצא בשורה מספר i ובעמודה מספר j.

אוסף מטריצות $m\times n$ (אומרים: m על n) מעל F מסומן ב- $Mat_{m,n}(F)$. אם $m=n$, מטריצה נקראת **ריבועית** ואז כותבים $Mat_n(F)$ במקום $Mat_{n,n}(F)$.

2. **דוגמאות.** $Mat_{1,n}(F)$ זה אוסף שורות באורך n. $Mat_{m,1}(F)$ זה אוסף עמודות באורך m.
3. **פעולות עם מטריצות.**
   - חיבור: אם $A,B\in Mat_{m,n}(F)$, כך ש- $A=(a_{ij})$ ו- $B=(b_{ij})$, אזי
$$A+B=(c_{ij})$$
כאשר $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.
   - **כפל בסקלר:** אם $A\in Mat_{m,n}(F)$ ואם $c\in F$, כך ש- $A=(a_{ij})$, אז
$$cA=(b_{ij})$$
כאשר $b_{ij}=c\cdot a_{ij}$.

פעולות חיבור וכפל בסקלר דומות מאוד לפעולות עם עמודות (או שורות) שכבר למדנו.

   - **כפל מטריצות:** אם $A\in Mat_{m,n}(F)$ ו- $B\in Mat_{r,s}(F)$, המכפלה AB מוגדרת כאשר $n=r$, זאת אומרת, כאשר אורך שורה ב-A שווה לאורך עמודה ב- B. במקרה זה התוצאה $AB=(c_{ij})$ ניתנת ע"י הנוסחה
$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$
שימו לב: בחישוב של האיבר c_{ij} משתתפת השורה מס' i של המטריצה A והעמודה מס' j של המטריצה B.
4. **מטריצות 0 ו- I. מטריצה הופכית.**
   - מטריצה שכל רכיביה אפסים מסומנת $0\in Mat_{m,n}(F)$. התכונה המאפיינת: $A+0=0+A=A$.

(ברור כי לכל זוג (m,n) מטריצה 0 אחרת. למרות זאת, אנו מרשים לעצמנו לכתוב 0 במקום $0_{m,n}$).

   - מטריצה $I\in Mat_n(F)$ בעלת רכיבים $I=(\delta_{ij})$ כאשר $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$.

התכונה המאפיינת: $A\cdot I=I\cdot A=A$. השוויון מתקיים כל פעם שהמכפלה מוגדרת.
   - תהי $A\in Mat_n(F)$. מטריצה $B\in Mat_n(F)$ נקראת מטריצה הופכית ל- A אם $AB=BA=I$. מטריצה A הפיכה אם קיימת מטריצה הופכית לה.

דוגמה. $A=\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}$ לא הפיכה. כי $\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}xy\\zt\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2z & y+2t\\x+2z & y+2t\end{pmatrix}$ - לתוצאה תמיד שתי השורות זהות – לכן לא ניתן לקבל כך את מטריצת היחידה.

משפט.אם B ו- C הופכיות למטריצה A אז $B=C$.
הוכחה. $B=B\cdot I=B\cdot(A\cdot C)=(B\cdot A)\cdot C=I\cdot C=C$.

יש לציין כי בהוכחה זו השתמשנו בחוק קיבוץ (לכפל מטריצות) שעוד לא הוכחנו.
מיד נוכיח אותו (וננסח חוקים אחרים).
נציין כי כדי לבדוק שהמטריצה B הופכית ל- A, מספיק לבדוק רק
$AB=I$ או $BA=I$. אנחנו נוכיח זאת בהמשך.

5. **תכונות הפעולות.**
נתחיל מהתכונה שכבר הזכרנו:
- **חוק קיבוץ לכפל:** עבור שלוש מטריצות A,B,C
  א) הביטוי $(AB)C$ מוגדר אם ורק אם הביטוי $A(BC)$ מוגדר.
  ב) ובמקרה שהם מוגדרים, הם זהים.

הוכחה. א) אם $A\in Mat_{m,n}(F)$, $B\in Mat_{r,s}(F)$, $C\in Mat_{k,l}(F)$, אז
קל מאוד לראות כי כל אחד מהביטויים מוגדר אם ורק אם $n=r, s=k$.
ב) איבר ה- (i,j) של $A(BC)$ הוא

$$x_{ij}=\sum_{t=1}^{n}a_{it}\sum_{u=1}^{s}b_{tu}c_{uj}\ .$$

ואילו איבר ה- (i,j) של $(AB)C$ הוא

$$y_{ij}=\sum_{u=1}^{s}\ (\sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{tu})c_{uj}\ .$$

אחרי החלפת סימני $\sum$ מיד רואים כי $x_{ij}=y_{ij}$.
עוד תכונות:
- **חוק קיבוץ לחיבור** $A+(B+C)=(A+B)+C$
- **חוק חילוף לחיבור** $A+B=B+A$
- **עוד חוק קיבוץ:** $c(AB)=(cA)B=A(cB)$
- **חוקי פילוג:** $A(B+C)=AB+AC$

  $(A+B)C=AC+BC$

  $c(A+B)=cA+cB$

  $(c+d)A=cA+dA$

6. **צורה חדשה למערכת משוואות לינאריות.**
זה פשוט $Ax=b$ כאשר $A\in Mat_{m,n}(F)$, $x\in Mat_{n,1}(F)$, $b\in Mat_{m,1}(F)$.

קל לבדוק כי אם A הפיכה, אז למערכת פתרון יחיד.
ואמנם, נכפיל את שני האגפים של המשוואה $Ax=b$ ב- A^{-1} משמאל. נקבל
$x=A^{-1}\cdot Ax=A^{-1}b$.
מצד שני, ברור כי $x=A^{-1}b$ הוא פתרון של המערכת. זה מוכיח כי הוא הפתרון היחיד.

7. מטריצות יסוד.

כשלמדנו שיטת גאוס לפתרון מערכת משוואות השתמשנו בפעולות יסוד E_{ij}, $E_i(\lambda)$, $E_{ij}(c)$ שהן החלפת שורות, הכפלה של שורה בסקלר, והוספה לשורה של שורה אחרת המוכפלת במספר.
עתה נראה כי פעולות יסוד אלה ניתן לפרש כהכפלה מצד שמאל במטריצות מיוחדות (הנקראות מטריצות יסוד).

פעולה E_{ij} .

תהי $A \in Mat_{m,n}(F)$. נגדיר מטריצה ריבועית $E_{ij} = (x_{rs})$ שרכיביה x_{rs} מוגדרים ע"י הנוסחה

$$x_{rs} = \begin{cases} 1, & r = s \neq i, j \\ 1, & (r,s) = (i,j) \\ 1, & (r,s) = (j,i) \\ 0 & otherwise \end{cases}.$$

מטריצה E_{ij} מתקבלת ממטריצה $I \in Mat_m$ ע"י החלפת שורות i ו- j .
קל לראות כי $E_{ij}A$ זאת מטריצה שמתקבלת מ- A ע"י החלפת שורות i ו- j .

פעולה $E_i(\lambda)$.

נגדיר מטריצה ריבועית $E_i(\lambda) = (x_{rs})$ שרכיביה x_{rs} מוגדרים ע"י הנוסחה

$$x_{rs} = \begin{cases} 1, & r = s \neq i \\ \lambda, & r = s = i \\ 0 & otherwise \end{cases}.$$

מטריצה $E_i(\lambda)$ מתקבלת ממטריצה $I \in Mat_m$ ע"י הכפלת שורת i ב- $0 \neq \lambda$.
קל לראות כי $E_i(\lambda)A$ זאת מטריצה שמתקבלת מ- A ע"י הכפלת שורת i ב- $0 \neq \lambda$.

פעולה $E_{ij}(c)$.

נגדיר מטריצה ריבועית $E_{ij}(c) = (x_{rs})$ שרכיביה x_{rs} מוגדרים ע"י הנוסחה

$$x_{rs} = \begin{cases} 1, & r = s \\ c, & (r,s) = (i,j) \\ 0 & otherwise \end{cases}.$$

מטריצה $E_{ij}(c)$ מתקבלת ממטריצה $I \in Mat_m$ ע"י הוספה לשורה i של שורה j המוכפלת ב- c .
קל לראות כי $E_{ij}(c)A$ זאת מטריצה שמתקבלת מ- A ע"י ע"י הוספה לשורה i של שורה j המוכפלת ב- c .

8. שיטת גאוס בעיניים חדשות.

כמסקנה מהדיון הקודם אנחנו מקבלים

משפט. *תהי* $A \in Mat_{m,n}(F)$ *. קיימות מטריצות יסוד* $E_1 , \dots , E_N$ *כך שהמכפלה* $A' = E_N \dots E_1 A$ *היא מטריצה בצורת מדרגה.*