מערכות משוואות לינאריות הומוגניות

1. משוואה לינארית

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$$

נקראת **הומוגנית** אם האיבר החופשי b שווה לאפס. בהתאם, במערכת משוואות הומוגניות כל האיברים החופשיים שווים לאפס. מבחינה הגאומטרית זה אומר כי כל העל-מישורים עוברים דרך ראשית הצירים.

למערכת הומוגנית תמיד יש פתרון $(0,0,\ldots,0)$.

אוסף כל פתרונות של מערכת הומוגנית מקיים תכונות מיוחדות – ראה משפט הבא.

2. **משפט.** יהי $(x_1,\ldots,x_n)$ פתרון של מערכת הומוגנית ויהי $c \in F$ מספר (איבר של שדה) קבוע.

אזי $(cx_1,\ldots,cx_n)$ גם כן פתרון של המערכת ההומוגנית.

אם $(x_1,\ldots,x_n)$ ו- $(y_1,\ldots,y_n)$ שני פתרונות של מערכת הומוגנית, אזי גם הסכום $(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$ הוא פתרון של המערכת.

הוכחה. אם $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$, אזי

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(cx_j) = c\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 .$$

אם $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$ וגם $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = 0$ אזי מתקיים

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j + y_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = 0 .$$

3. נתונה מערכת m משוואות הומוגניות עם n נעלמים. אחרי דירוג שוב נקבל מערכת משוואות הומוגניות. נניח כי אחרי דירוג קיבלנו $k \le m$ משוואות לא טריוויאליות (שונות מאפס). זה אומר כי בפתרון הכללי יהיו לנו $n-k$ פרמטרים בלתי-תלויים.

<u>בפרט, קיבלנו מסקנה: אם למערכת m משוואות הומוגניות עם n נעלמים פתרון יחיד, אז בהכרח $m \ge n$.</u>

יש לציין כי טענה זאת נכונה גם עבור מערכות משוואות לינאריות לא-הומוגניות.

4. **דוגמה.** מערכת משוואות הומוגניות נתונה ע"י מטריצת המקדמים

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

הנעלמים החופשיים הם x_2, x_4 . אם נסמן $x_2 = s, x_4 = t$, הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} -2s+3t \\ s \\ -3t \\ t \end{pmatrix}.$$

אם נשתמש בפעולות חיבור וקטורים וכפלם במספר, נותן לרשום את התוצאה כדלקמן:

$$s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

צורה חדשה של פתרון כללי שקיבלנו ראויה לציון.

א. אם נציב $s=0,t=1$ ו- $s=1,t=0$ נקבל שני פתרונות פרטיים $v_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ב. כל פתרון המערכת ניתן לכתוב בצורה sv_1+tv_2 – צורה כזאת נקראת **צירוף לינארי** של v_1 ו- v_2.

ג. הצגה כזאת יחידה: אם $sv_1+tv_2=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ אז בהכרח $s=b, t=d$.

זוג וקטורים (כאן =עמודות) v_1, v_2 נקרא **בסיס של קבוצת הפתרונות.**

5. כל מה שנאמר דלעיל נכון לגבי כל מערכת משוואות הומוגניות.
פתרון כללי ניתן לרשום בצורה

$$t_1v_1+\ldots+t_rv_r$$

כאשר $t_i\in F$ פרמטרים, $v_i\in F^n$ עמודות המהוות בסיס באוסף פתרונות למערכת.
כאן מספר עמודות הבסיס r שווה ל- $n-k$ כאשר n מספר הנעלמים ו- k מספר שורות השונות מאפס במטריצה מדורגת.

6. בסעיף הקודם הוסבר איך לקבל בסיס של קבוצת הפתרונות על סמך מערכת מדורגת.
ועתה נוכיח כי לבסיסים שונים אותו מספר איברים.

משפט. יהיו

$$v_1,\ldots,v_r \text{ ו- } w_1,\ldots,w_s$$

שני בסיסים של אוסף פתרונות למערכת משוואות הומוגניות. אזי $r=s$.

הוכחה. כל אחד מ- w_i הוא צירוף לינארי של $v_1,\ldots,v_r$: $w_i=\sum_{j=1}^{r}a_{ij}v_j$.

כיוון ש- $\{w_i\}$ בסיס, את כל פתרון, בפרט הפתרון הטריביאלי, ניתן להציג **באופן יחיד**

כצירוף לינארי של $w_1,\ldots,w_s$. לכן למשוואה $\sum_{i=1}^{s} x_i w_i = 0$ יש רק פתרון טריוויאלי.

נציב במקום w_i את ביטויו דרך v_j . נקבל

$$\sum_{i=1}^{s} x_i \sum_{j=1}^{r} a_{ij} v_j = 0 \ .$$

נשכתב את האגף השמאלי של המשוואה :

$$\sum_{i=1}^{s} x_i \sum_{j=1}^{r} a_{ij} v_j = \sum_{j=1}^{r} (\sum_{i=1}^{s} a_{ij} x_i) v_j \ .$$

מסקנה: למערכת משוואות $\sum_{i=1}^{s} a_{ij} x_i = 0$ יש רק פתרון טריוויאלי. אך זה גורר כי

מספר המשוואות r חייב להיות גדול או שווה למספר הנעלמים s .

ובכן הוכחנו כי $r \geq s$. באותה דרך, אם נחליף את תפקידיהם של v_i ו- w_j ,

נקבל גם את $s \geq r$. זה מוכיח כי $r = s$.

סוף ההוכחה.

7. מערכת לא הומוגנית.

תהי $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, $i = 1,\cdots,m$ מערכת משוואות ליניאריות כללית. המערכת ההומוגנית עם אותם מקדמים $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0,$,
נקראת המוערכת ההומוגנית המתאימה (למערכת מקורית).
אנו יודעים שלמערכת כללית לא תמידיש פתרון. אבל מתברר שאם יש פתרון למערכת, אז בהכרח יש בתרון הכללי אותו מספר הפרמטרים שיש לפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

משפט. נניח שלמערכת משוואות ליניאריות $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, $i = 1,\cdots,m$ קיים פתרון $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$. אזי סכום שתי העמודות

$v + w$ הוא גם פתרון של המערכת אם ורק אם w היא פתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.
במלים אחרות, הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית ניתן להציג כסכום של פטרון פרטי והפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

הוכחה. יהי $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$. נציב את הסכום $v + w$ במשוואה מס' i. נקבל

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j + y_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$$

צד ימין שווה ל-b_i אם ורק אם $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = 0$. זה מוכיח את המשפט.