משמעות גאומטרית של מערכות משוואות לינאריות

1. משוואה לינארית עם שני נעלמים x ו- y צורתה הכללית

$$ax+by=c$$

אוסף פתרונות של המשוואה במישור $R^2=\{(x,y)\,|\,x,y\in F\}$ מהווה **קו ישר.**

(**הערה:** במקרה מיוחד $a=b=c=0$ הפתרונות – כל המישור R^2)
אוסף פתרונות של מערכת משוואות עם שני נעלמים הוא חיתוך של מספר קווים ישרים.
קל להסיק מזה כי למערכת משוואות במקרה זה הפתרונות מתוארות ע"י אחת הקבוצות הבאות:

- כל המישור R^2
- קו ישר (ניתן ע"י משוואה לינארית אחת)
- פתרון יחיד
- אין פתרונות.

אם אכן יש פתרונות למערכת, אז מספר הפרמטרים המתארים את הפתרון הכללי, שווא ל-2, 1, 0 למישור, לקו ישר ולפתרון יחיד בהתאם.

יש לציין כי שתי משוואות, $ax+by=c$ ו- $a'x+b'y=c'$ מגדירות אותו קו ישר אם ורק אם השלישייה (a,b,c) פרופורציונלית לשלישייה (a',b',c') , זאת אומרת, אם קיים מספר $\lambda\neq 0$ כך ש- $a'=\lambda a,\quad b'=\lambda b,\quad c'=\lambda c$.

נציין גם כי אם $a'=\lambda a,\quad b'=\lambda b$ אך $c'\neq\lambda c$ אז הקווים הישרים המוגדרים על-ידי המשוואות, מקבילים (אך לא מתלכדים). במקרה זה אין פתרונות למערכת.

שתי משוואות שהמקדמים שלהם לא פרופורציונליים (לא קיים $\lambda\neq 0$ כך ש- $a'=\lambda a,\quad b'=\lambda b$) מגדירות קווים ישרים שיש להם נקודת חיתוך אחת ויחידה.

תרגיל: הוכח כי למערכת שתי משוואות עם שני נעלמים $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ פתרון יחיד אם ורק אם $ab'-a'b\neq 0$.

2. נציין בקצרה במה תשתנה התמונה כאשר יש לנו שלשה נעלמים.
משוואה לינארית כללית נכתבת כך: $ax+by+cz=d$.

אם $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ משוואה זאת מגדירה מישור ב מרחב $R^3=\{(x,y,z)\,|\,x,y,z\in R\}$.
להלן אפשרויות לאוסף כל הפתרונות למערכת משוואות עם שלשה נעלמים:

- כל מרחב R^3
- מישור ב- R^3
- קו ישר (ניתן להגדיר ע"י שתי משוואות לינאריות)
- פתרון יחיד
- אין פתרונות.

שוב שני מישורים מתלכדים אמ"ם כל ארבעה מקדמיהם (כולל איבר חופשי) פרופורציונליים.
אם המקדמים של x,y,z פרופורציונליים אז המישורים מקבילים.
אם הם לא מקבילים, החיתוך שלהם הוא קו ישר.

כבר במקרה זה ניתוח מלא די ארוך.

3. יש טעם להשתמש במונחים גאומטריים ובאינטואיציה גאומטרית גם כשמדובר ביותר משלשה משתנים.

אוסף צירופים של n מספרים מסומן ב- R^n .

כל משוואה $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$ בה לא כל a_i שווים לאפס – אוסף פתרונות שלה מהווה קבוצה ששמה **על-מישור** (hypersurface).

פתרון כללי למערכת הוא חיתוך של מספר עלמישורים.

שאלות מעניינות:

- מתי יש פתרון יחיד למערכת?
- כמה פרמטרים לפתרון הכללי?