# מערכות משוואות לינאריות
# מונחים

1. **מטריצה.**
טבלת מספרים בצורת מלבן. מטריצה בעלת $m$ שורות ו- $n$ עמודות נקראת מטריצה $m$ על $n$ (או $m\times n$ ).

מדברים על מטריצה מעל **R** (או מעל **C**) אם רכיביה מספרים ממשיים (או מרוכבים).

2. **מערכת משוואות לינאריות**
מגדירה שתי מטריצות: מטריצת המקדמים והמטריצה המורחבת.
אם המערכת ניתנת ע"י משוואות

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}x_j = b_i$$

כאשר $i=1,\ldots,m$ , אזי מטריצת המקדמים היא

$$\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\cdots a_{m\,n} \end{pmatrix}$$

ואילו המטריצה המורחבת היא

$$\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} & |\, b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & | \\ a_{m1}\cdots a_{m\,n} & |\, b_m \end{pmatrix}$$

3. **מטריצה בצורת מדרגה.**
אומרים כי מטריצה $A=(a_{ij})$ היא בצורת מדרגה אם לכל משבצת $(i,j)$ התנאי הבא מתקיים:
**אם** $a_{ik}=0$ **לכל** $k<j$ **אזי** $a_{kj}=0$ **לכל** $k>i$**.**
(אם בכל המשבצות משמאל למשבצת $(i,j)$ רק אפסים, אז גם בכל המשבצות מתחת לה אפסים).

מושג מטריצה בצורת מדרגה אפשר לנסח כדלקמן.
תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה. נחפש בכל שורה את המשבצת השמאלית ביותר שהרכיב שלה שונה מאפס. יהי $f_1$ מספר משבצת כזאת בשורה הראשונה, $f_2$ בשורה השניה, וכן הלאה (אם שורה מספר $i$ בנויה רק מאפסים, $f_i$ אינו מוגדר).

עכשיו אפשר לומר:
מטריצה $A=(a_{ij})$ בצורת מדרגה אם ורק אם קיים $k$ כך ש- $f_1<\ldots<f_k$ והשאר $f_{k+1},\ldots,f_m$ לא מוגדרים.
המספר $k$ הוא מספר שורות השונות מאפס. הוא נקרא גם **דרגה** של מטריצה בצורת מדרגה.

4. **מערכת משוואות בצורת מדרגה.**
זאת מערכת משוואות לינאריות אשר המטריצה המורחבת שלה היא בצורת מדרגה.
תהי $k$ דרגה של המטריצה המורחבת.
ישנם שני מקרים:

- בשורה $k$ כל הרכיבים של מטריצת המקדמים שווים לאפס (זה אומר כי $f_k = n+1$ ). במקרה זה אין למערכת פתרונות.
- $f_k \le n$ . במקרה זה למערכת יש פתרונות.

נקרא למשתנים שמספריהם $f_1,\dots f_k$ - משתנים תלויים. מספרם - $k$ (דרגת המערכת).
ולשאר המשתנים – משתנים בלתי-תלויים. מספרם - $n-k$
אם נתן למשתנים הבלתי-תלויים ערכים באופן שרירותי, נוכל לפתור את כל המשוואות מהמשוואה ה- $k$ ועד המשוואה הראשונה, ולמצוא את הארכים של המשתנים מספר $f_k$ , אחר-כך $f_{k-1}$ , וכן הלאה עד $k_1$ .

בדרך זו נקבל את כל הפתרונות של המערכת.

**ההסבר:** במקרה הראשון המשוואה מס' $k$ נראית כך:

$$0\cdot x_1+\ldots+0\cdot x_n=b_k$$

כאשר $b_k \ne 0$ . למשוואה זו אין פתרונות. במקרה השני כל משוואה מס' $i$ $(i=1,\ldots,k)$ מאפשרת לנו לבטא את $x_{f_i}$ דרך המשתנים בעלי מספר גבוה מ- $f_i$ . זה אומר שאם נבחר ערכים למשתנים הבלתי-תלויים באופן שרירותי, נוכל לקבל ערכים למשתנים תלויים באופן חד-משמעי.

5. **פעולות מותרות.**
נגדיר עתה שלוש **פעולות יסוד** (elementary transformations). פעולות אלה, כשמפעילים אותם על מערכות משוואות לינאריות, נותנות מערכת השקולה למערכת המקורית. יותר מאוחר נראה כי ניתן לצמצם בעזרת פעולות יסוד כל מערכת משוואות לינאריות למערכת בצורת מדרגה.

**א. החלפת שורות $i$ ו- $j$ .**
אם $A=(a_{ij})$ המטריצה המקורית, אחרי הפעלת פעולה זו נקבל מטריצה חדשה $B=(b_{ij})$ כאשר

$$b_{kl}=\begin{cases} a_{kl}, & k\ne i,j\\ a_{jl}, & k=i\\ a_{il}, & k=j.\end{cases}$$

את הפעולה הזאת נסמן ב- $E_{ij}$ .

**ב. הכפלה של שורה $i$ במספר** $\lambda\ne 0$ .
אם $A=(a_{ij})$ המטריצה המקורית, אחרי הפעלת פעולה זו נקבל מטריצה חדשה $B=(b_{ij})$ כאשר

$$b_{kl}=\begin{cases} a_{kl}, & k\neq i \\ \lambda a_{il}, & k=i. \end{cases}$$

את הפעולה הזאת נסמן ב- $E_i(\lambda)$ .

ג. **הוספה לשורה** $i$ **של שורה** $j$ **המוכפלת במספר** $c$ .

אם $A=(a_{ij})$ המטריצה המקורית, אחרי הפעלת פעולה זו נקבל מטריצה חדשה $B=(b_{ij})$ כאשר

$$b_{kl}=\begin{cases} a_{kl}, & k\neq i \\ a_{il}+\lambda a_{jl}, & k=i. \end{cases}$$

את הפעולה הזאת נסמן ב- $E_{ij}(c)$ .

**6. מדוע פעולות יסוד שומרות על אוסף פתרונות.**

עלינו להוכיח את הטענה הבאה:

תהי $A$ המטריצה המורחבת של מערכת משוואות לינאריות ותהי $B$ מטריצה המתקבלת מ- $A$ ע"י אחת פעולות היסוד $A_{ij}$, $A_i(\lambda)$ , $A_{ij}(c)$ .

אזי ל- $A$ ול- $B$ אותו אוסף פתרונות.

**הוכחה.** צ"ל: אם $(x_1,\ldots,x_n)$ פתרון ל- $A$ אז הוא פתרון גם ל- $B$, ולהיפך.

ברור שכל פתרון של $A$ הוא פתרון של $B$ . במקום להוכיח כי גם ההיפך נכון, נבדוק כי אפשר להפעיל פעולת יסוד על $B$ ולקבל $A$ בחזרה (פעולת יסוד הפכית).

פעולת היסוד ההפכית ל- $E_{ij}$ היא $E_{ij}$ עצמה.

פעולת היסוד ההפכית ל- $E_i(\lambda)$ היא $E_i(\lambda^{-1})$ .

פעולת היסוד ההפכית ל- $E_{ij}(c)$ היא $E_{ij}(-c)$ .

**7. מדוע ניתן לצמצם כל מטריצה לצורת מדרגה ע"י פעולות יסוד.**

נוכיח שזה תמיד אפשרי.

**הוכחה.**

נתונה מטריצה $A=(a_{ij})$ בעלת $m$ שורות ו- $n$ עמודות.

אנו נוכיח שאפשר להביא אותה לצורת מדרגה בעזרת אינדוקציה לפי מספר שורות $m$ .

עבור $m=1$ כל מטריצה בצורת מדרגה.

נניח כי הוכחנו את הטענה עבור מטריצות בעלות $m>$ שורות.

נוכיח עבור מטריצה $A$ בעלת $m$ שורות.

אם כל הרכיבים של $A$ שווים לאפס, אין מה להוכיח. אחרת יהי $j$ מספר העמודה השמאלית ביותר שיש בה רכיבים השונים מאפס. נניח $a_{ij}=0$ .

נפעל $E_{1i}$ (ונשאיר אותו שם $A$ למטריצה שמתקבלת). מקבלים $a_{kl}=0$ עבור $l<j$ ו- $a_{1j}\neq 0$. נפעיל $E_1(a_{1j}{}^{-1})$ ונקבל $a_{1j}=1$.

עכשיו עבור כל שורה החל מהשורה השניה נפעיל $E_{i1}(-a_{ij})$.

אחרי כל פעולות אילו נקבל מטריצה בה

$a_{1l}=0$ עבור $l<j$ , $a_{1j}=1$ ,

$a_{kl}=0$ אם $k\geq 2$ ו- $l<j+1$ .

כעת נשכח לרגע על השורה הראשונה של המטריצה ונביא את $m-1$ השורות שנשארו לצורת מדרגה. כיוון שלכל השורות, פרט לשורה הראשונה, הרכיבים ב- $j$ העמודות הראשונות שווים לאפס, תכונה זו תשמר. זה מבטיח כי, כשנצרף בחזרה את השורה הראשונה, המטריצה תישאר בצורת מדרגה.
סוף ההוכחה.