מספרים מרוכבים

1. אנחנו זוכרים מבית הספר את הנוסחה לפתרון משוואה ריבועית $x^2+px+q=0$:

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

אם הביטוי מתחת לשורש גדול מאפס, למשוואה שני פתרונות ממשיים. אם הוא שווה לאפס, למשוואה פתרון אחד (אומרים גם שלפולינום שני שורשים מתלכדים). במקרה ש- $p^2-4q<0$ אין למשוואה פתרונות ממשיים. אך עדיין יש עניין להרחיב מושג של מספר, כך שגם במקרה זה יהיו למשוואה שני פתרונות (ראה מאמר על קרדנו וספרו המפורסם "Ars Magna").

2. מספר מרוכב, לפי הגדרה, הוא ביטוי $x+yi$ כאשר x,y מספרים ממשיים ו- i - "היחידה המדומה" שתקיים תכונה $i^2=-1$. אנחנו מגדירים פעולות חיבור וכפל של המספרים המרוכבים כך שיתקיימו תכונות רגילות של פעולות אלה:

- חוקי קיבוץ וחילוף לחיבור
- חוקי קיבוץ וחילוף לכפל
- חוק פילוג (המאפשר לפתוח סוגריים)

לכן, הגדרות פעולות חיבור וכפל של מספרים מרוכבים הן:

- חיבור: $(x+yi)+(z+ti)=(x+z)+(y+t)i$
- כפל: $(x+yi)(z+ti)=(xz-yt)+(xt+yz)i$

להלן הסקה של נוסחת הכפל מהחוקים הנזכרים דלעיל:

$(x+yi)(z+ti)=xz+xti+yzi+yti^2=xz+(xt+yz)i-yt$,

בשוויון האחרון השתמשנו בכך ש- $i^2=-1$.

3. אפשר לראות את קבוצת R המספרים הממשיים כתת-קבוצה של המספרים המרוכבים.
אם $z=x+yi$, x נקרא *החלק הממשי של* z (הסימון: $x=\mathrm{Re}(z)$), ו- y נקרא *החלק המדומה של* z (הסימון: $y=\mathrm{Im}(z)$).
כך z הוא מספר ממשי אמם (=אם ורק אם) $\mathrm{Im}(z)=0$.

4. אם $z=x+yi$ אז $z+(-x-yi)=0$. זו תכונה נוספת של חיבור שמתקיימת ב- C :

- קיום איבר נגדי.

עכשיו אנו נוכיח כי כל מספר מרוכב שונה מאפס הפיך: לכל $z\in C$ קיים z' כך ש: $zz'=1$.
לאיבר z' קוראים: ההופכי של z ומסמנים אותו ב- z^{-1} .

לכל $z=x+yi$ מגדירים $\bar{z}=x-yi$. המספר $\bar{z}$ נקרא *הצמוד של* z .
נחשב

$$z\bar{z}=(x+yi)(x-yi)=x^2+y^2$$

המספר שקיבלנו חיובי או אפס; הוא שווא לאפס רק כאשר $z=0$. לכן, $z\frac{\bar{z}}{x^2+y^2}=1$.

כך הוכחנו כי $z^{-1}=\frac{\bar{z}}{x^2+y^2}$.

5. פרוש גיאומטרי של המספרים המרוכבים:

מספר מרוכב $z=a+bi$ ניתן לפרש כנקודה במישור, בעלת קואורדינטות (a,b).
כאן נוח מאוד להשתמש בקואורדינטות קוטביות:

- רדיוס $r=\sqrt{a^2+b^2}$, הסימון: $r=|z|$.
- ארגומנט $0\le\varphi<2\pi$ שהוא זווית בין ציר ה-x לבין הקו המחבר את ראשית הצירים ואת הנקודה $z=(a,b)$. הארגומנט מוגדר באופן יחיד ע"י התכונה $\tan(\varphi)=\frac{a}{b}$.

  הסימון: $\varphi=Arg(z)$.

הזוג (r,φ) מגדיר את המספר המרוכב:

- $z=r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))$, $a=r\cos(\varphi),\quad b=r\sin(\varphi)$.

נזכיר: $z\bar{z}=r^2$.

תרגיל: הוכח כי $|z|=1$ אממ $z^{-1}=\bar{z}$.

משפט: ***1.*** $|zz'|=|z||z'|$.
2. $Arg(zz')=Arg(z)+Arg(z')$.
בנוסחה האחרונה הסכום הוא עד כדי 2π.

הוכחה. נתון כי $z=r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))$, $z'=r'(\cos(\psi)+i\sin(\psi))$.
המכפלה נותנת

$$zz'=rr'(\cos(\varphi)\cos(\psi)-\sin(\varphi)\sin(\psi)+i(\sin(\varphi)\cos(\psi)+\sin(\psi)\cos(\varphi))=$$
$$rr'(\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)).$$

6. נראה איך אפשר לפתור משוואה $z^n=a$ בעזרת הפירוש הגיאומטרי של מספרים מרוכבים.
יהי $a=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ונחפש z בצורה $z=\rho(\cos\psi+i\sin\psi)$. לפי המשפט

- $\rho^n=r$
- $n\psi=\varphi+2\pi k$ (k מספר שלם).

כך אנחנו מקבלים n פתרונות שונים למשוואה:

$$\psi=\frac{\varphi+2\pi k}{n},\ k=0,\ldots n-1\ ;\ \rho=\sqrt[n]{r}.$$