מרחבים וקטוריים.
מרחב מנה ומכפלה טנזורית.

1 . יהי V מרחב וקטורי ויהי W תת-מרחב בו. מטרתנו לבנות מרחב וקטורי חדש Q, העתקה לינארית $\rho : V \to Q$ **על**, כך שהגרעין של ρ שווה ל-W. בניה דומה מאוד כבר עשינו פעם אחת (אולי, בלי לשים לב על כך). נזכיר אותה.

יהי n מספר טבעי. כדי להגדיר שאריות מודולו n, אפשר ללכת בשתי דרכים. בדרך הראשונה מגדירים שאריות כמספרים מהקבוצה $\{0,1,\dots,n-1\}$ ואז מסבירים איך מחברים אותם (פעולת כפל לא מעניינת אותנו כאן). בדרך זו יכולנו לבחור קבוצה אחרת של מספרים, למשל, $\{1,\dots,n-1,n\}$, ולהגדיר פעולת חיבור איתם – דבר יחיד שחשוב הוא שכל שארית בחילוק ב-n תופיע פעם אחת. בגישה השניה אנחנו מחלקים את כל המספרים השלמים לקבוצות לפי השארית, והקבוצות האלה ישחקו תפקיד של השאריות – כך ש-0 מסמן את כל המספרים ה מתחלקים ב-n, 1 מסמן את כל המספרים בעלי שארית 1 בחילוק ב-n, וכן הלאה.
אם עכשיו רוצים לחבר שתי קבוצות אלה, בוחרים מספר בכל אחת מהן, מחברים את המספרים, וקבוצתה של התוצאה היא התשובה.

2. ניתן עתה הגדרה של מרחב Q ושל העתקה $\rho : V \to Q$ בסגנון של הגישה השניה שהזכרנו.
נזכיר כי נתונים לנו מרחב V ותת-מרחב W בו.
הגדרה. נאמר כי שני איברים $x, y \in V$ <u>שקולים</u> אם ההפרש $x-y$ שייך ל-W.
איברים של מרחב חדש Q הם <u>מחלקות שקילות</u> מודולו W (במילים אחרות, קבוצות $x+W$ כאשר $x \in V$).
פעולות חיבור וכפל ב-Q:

- $(x+W)+(y+W)=x+y+W$
- $c(x+W)=cx+W$

במילים אחרות, כדי לחבר שתי מחלקות, יש לבחור נציג (=איבר) בכל אחת, לחבר את האיברים, ומחלקתו של הסכום היא התוצאה.
קל לראות כי תוצאת החיבור לא תלויה בבחירת נציג.

העתקה ρ . ישנה רק דרך אחת להגדירה: $\rho(x)=x+W$. ברור כי ρ העתקה לינארית.
ברור גם כי ρ היא העתקת על. לבסוף, הגרעין של ρ הוא אוסף כל האיברים $x \in V$ כך ש x שקול ל-0 . לפי ההגדרה, $Ker(\rho)=W$.

המרחב שבנינו נקרא <u>מרחב מנה</u> של V מודולו W . הסימון המקובל עבורו V/W.

3. **דוגמאות.**
קודם כל, $V/V=0$, וגם $V/0=V$.
נתבונן בדוגמה יותר מעניינת.
יהי V מרחב וקטורי עם בסיס $x_1,\dots,x_n$. יהי $W=Span\{x_1,\dots,x_k\}$.

כל וקטור $x \in V$ מתואר ע"י הקואורדינאטות $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. וקטורים (a_i) ו- (b_i) שקולים

אם $a_i=b_i$ עבור $k<i$. לכן כל איבר במרחב מנה V/W אפשר לתאר באופן יחיד ע"י

הקואורדינאטות $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. בפרט, $\dim V/W = \dim V - \dim W$.

ההעתקה $\rho : V \to V/W$ בקואורדינאטות אלה מעבירה עמודה $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ אל עמודה $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

דוגמה שתיארנו היא "כללית" כי אם נתון זוג מרחבים וקטוריים $W \subseteq V$, תמיד אפשר לבחור בסיס ב- V כך ש- W נפרש ע"י קטע התחלתי שלו.

4. **הערה.** הדוגמה הקודמת קצת מטעה: אפשר לחשוב (בטעות) כי אם $W = Span\{x_1, \ldots, x_k\}$, אזי $V/W = Span\{x_{k+1}, \ldots, x_n\}$. זה לא נכון וגם לא יכול להיות נכון: אנחנו יכולים לבחור שני בסיסים שונים, למשל, $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$ ו- $x_1, \ldots, x_k, y_{k+1}, \ldots, y_n$. אזי $Span\{x_{k+1}, \ldots, x_n\} \neq Span\{y_{k+1}, \ldots, y_n\}$.

5. **הערה.** בכל זאת, למרות ש- $V/W \neq Span\{x_{k+1}, \ldots, x_n\}$, יש קשר הדוק בין המרחבים: ההעתקה $\rho : V \to V/W$ המצומצמת על $W' := Span\{x_{k+1}, \ldots, x_n\}$, משרה איזומורפיזם $\rho|_{W'} : W' \tilde{\to} V/W$.

6. בדומה למה שנאמר בסעיף 5, אם $V = W \oplus W'$ סכום שני תתי-מרחב, אז הצמצום של $\rho : V \to V/W$ על W' הוא איזומורפיזם $\rho|_{W'} : W' \tilde{\to} V/W$.

7. הנה *תכונה אוניברסאלית* של מרחב מנה:

תהי $f : V \to V'$ העתקה לינארית. יהי $W \subseteq V$ תת-מרחב המקיים $W \subseteq Ker(f)$.
אזי קיימת ויחידה העתקה לינארית $\bar{f} : V/W \to V'$ כך ש- $f = \bar{f} \circ \rho : V \to V/W \to V'$ ץ

ההגדרה של $\bar{f}$: $\bar{f}(x+W) = f(x)$.

8. **מכפלה טנזורית.**
אנחנו נגדיר עתה פעולה חדשה עם מרחבים וקטוריים: מכפלה טנזורית.
יהיו V, W שני מרחבים וקטוריים.
הגדרה. העתקה $f : V \times W \to U$ נקראת דו-לינארית אם

- $f(x+x', y) = f(x,y) + f(x', y); \quad f(x, y+y') = f(x,y) + f(x,y')$
- $f(cx, y) = cf(x,y); \quad f(x, cy) = cf(x,y)$

אנחנו נבנה עכשיו מרחב וקטורי $V \otimes W$ (מכפלה טנזורית של V ו- W) והעתקה דו-לינארית $\theta : V \times W \to V \otimes W$. העתקה θ תקיים תכונת אוניברסאליות שננסח מאוחר יותר.

הגדרה של $V \otimes W$ קצת קשה לעיכול. אנחנו נוכל לחיות איתה יותר קל אחרי שנלמד את התכונה האוניברסאלית שלה ונעשה חישוב אחד.

הגדרה.
נגדיר מרחב וקטורי X כמרחב וקטורי הנפרש ע"י הקבוצה $V \times W = \{(x,y) \mid x \in V, y \in W\}$.
איברי מרחב X - צירופים לינאריים סופיים $(c_i \in F) \quad \sum c_i (x_i, y_i),$.

נגדיר ב- X תת-מרחב Y הנפרש ע"י האיברים
$(x+x',y)-(x,y)-(x',y),\ (x,y+y')-(x,y)-(x,y'),\ (cx,y)-c(x,y),\ (x,cy)-c(x,y)$
אנחנו מגדירים $V\otimes W=X/Y$. לכל $(x,y)\in X$ אנחנו מסמנים $x\otimes y=\rho(x,y)$ כאשר $\rho:X\to X/Y$ ההעתקה הטבעית.
העתקה $\theta:V\times W\to V\otimes W$ מוגדרת ע"י הנוסחה $\theta(x,y)=x\otimes y$. היא דו-לינארית כית למשל, $(x+x')\otimes y-x\otimes y-x'\otimes y=\rho((x+x',y)-(x,y)-(x',y))=0$ כי $(x+x',y)-(x,y)-(x',y))\in Y$ לפי הגדרת Y.

9. התכונה האוניברסאלית.
תהי $f:V\times W\to U$ העתקה דו-לינארית. אזי קיימת ויחידה העתקה לינארית $\bar{f}:V\otimes W\to U$ כך שמתקיים שוויון $f=\bar{f}\circ\theta$.
הוכחה.
העתקה f מגדירה באופן יחיד העתקה לינארית $F:X\to U$ כי הקבוצה $V\times W$ היא בסיס של X. עכשיו כל איבר מהצורה
$(x+x',y)-(x,y)-(x',y),\ (x,y+y')-(x,y)-(x,y'),\ (cx,y)-c(x,y),\ (x,cy)-c(x,y)$
שייך לגרעין של F – כי העתקה f דו-לינארית לפי ההנחה. לכן, לפי האוניברסאליות של מרחב מנה, F מגדיר העתקה לינארית יחידה $\bar{f}:V\otimes W=X/Y\to U$.
קל לראות שהעתקה זו היא יחידה המקיימת את התכונה $f=\bar{f}\circ\theta$.

עתה ננסה לדמיין איך נראית הפעולה שהגדרנו.

10. יהי $x_1,\dots,x_n$ בסיס ב- V, ואילו $y_1,\dots,y_m$ בסיס ב- W.
אנחנו נבנה עתה איזומורפיזם בין $V\otimes W$ לבין המרחב וקטורי הנפרש ע"י הקבוצה של ביטויים $x_i\otimes y_j$ (כך שבאופן אוטומטי המימד של $V\otimes W$ שווה ל- mn). נסמן זמנית את המרחב האחרון ב- U.

נגדיר $\eta:V\times W\to U$. אם $x=\sum a_ix_i,\ y=\sum b_jy_j$, נגדיר $\eta(x,y)=\sum a_ib_jx_i\otimes y_j$.

לפי התכונה האוניברסאלית זה מגדיר את ההעתקה $\bar{\eta}:V\otimes W\to U$ (היא מעבירה $x\otimes y$ ל- $\sum a_ib_jx_i\otimes y_j$ כאשר $x=\sum a_ix_i,\ y=\sum b_jy_j$). קל לראות שזה איזומורפיזם.

11. קשר ל- $Hom(V,W)$.

יהיו $\dim V=n,\dim W=m$. הן $Hom(V,W)$ והן $V\otimes W$ בעלי מימד $m\cdot n$. זה לא מקרי. מתקיים
משפט.
קיים איזומורפיזם טבעי (=שלא תלוי בבחירת בסיס) בין $Hom(V,W)$ לבין $V^*\otimes W$.
הוכחה. נגדיר העתקה דו-לינארית $F:V^*\times W\to Hom(V,W)$ ע"י הנוסחה
$$(\forall\alpha\in V^*\forall y\in W)\quad F(\alpha,y)(x)=\alpha(x)\cdot y$$
לפי התכונה האוניברסאלית, זה מגדיר העתקה לינארית
$$\overline{F}:V^*\otimes W\to Hom(V,W)$$
העתקה $\overline{F}$ על כי אנחנו יודעים בסיס ב- $Hom(V,W)$ והוא נמצא בתמונה של $\overline{F}$.
זה חייב להיות איזומורפיזם כי המרחבים בעלי אותו מימד.