מרחבים וקטוריים.
פעולות עם המרחבים.

1 . **תתי-מרחב.** יהי F שדה, W מרחב וקטורי, V_1,V_2 תתי-מרחב ב- W.
למה. החיתוך $V_1 \cap V_2$ גם כן תת-מרחב וקטורי.(בדקו לבד!)
לעומת זאת, האיחוד $V_1 \cup V_2$ בדרך כלל אינו תת-מרחב וקטורי ב- W.

תרגיל. הוכח כי $V_1 \cup V_2$ תת-מרחב וקטורי רק כאשר $V_1 \subseteq V_2$ או $V_2 \subseteq V_1$.
רמז: בדרך השלילה.

הגדרה. סכום V_1+V_2 הוא אוסף איברים ב- W שניתן לרשום אותם בצורה x_1+x_2 כאשר $x_1 \in V_1, x_2 \in V_2$.

אנחנו חייבים לבדוק קודם כל ש- V_1+V_2 תת-מרחב ב- W.
בדיקה: $c(x_1+x_2)=cx_1+cx_2$ – הקבוצה סגורה ביחס כפל בסקלר;

$(x_1+x_2)+(x_1'+x_2')=(x_1+x_1')+(x_2+x_2')$ (עליכם עוד להבין מדוע הכתוב מוכיח את הטענה).

2. **משפט.** מתקיים השוויון $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1 \cap V_2)$.
הוכחה תינתן אחרי המסקנות.
3. **מסקנה.** אם $V_1 \cap V_2 = 0$, אז $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$.
4. **מסקנה.** אם $\dim V_1+\dim V_2 > \dim W$ אז $V_1 \cap V_2$ שונה מאפס.

5. הוכחת המשפט (לא מלאה, תשלימו לבד!)
אנחנו נציג בסיסים בכל אחד מהמרחבים ונספור בסיסים.
- נבחר בסיס $x_1,\ldots,x_k$ בחיתוך $V_1 \cap V_2$.
- נשלים לבסיס $x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_m$ ב- V_1 .
- כמו כן נשלים x_i לבסיס $x_1,\ldots,x_k,z_1,\ldots,z_n$ ב- V_2.

אנו טוענים כי הסדרה $x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n$ היא בסיס ל- V_1+V_2 .
זה יוכיח את המשפט כי $\dim(V_1 \cap V_2)=k$, $\dim V_1 = k+m$, $\dim V_2 = k+n$, $\dim(V_1+V_2)=k+m+n$.
תרגיל טוב: להוכיח את הטענה הזאת ישירות.
אנחנו נרשה לעצמנו להשאיר את הטענה הזאת בלי הוכחה כי יותר מאוחר נקבל את זה בדרך אחרת.

6. **סכום ישיר.** יהיו V_1,V_2 שני מרחבים וקטוריים.
נגדיר מרחב וקטורי חדש $V_1 \oplus V_2$, סכום ישיר של V_1 ו- V_2 כדלקמן:
כקבוצה זה אוסף זוגות (x_1,x_2) כאשר $x_1 \in V_1, x_2 \in V_2$. פעולות:
- $c(x_1,x_2)=(cx_1,cx_2)$
- $(x_1,x_2)+(x_1',x_2')=(x_1+x_1',x_2+x_2')$

נגדיר כמה העתקות לינאריות מעניינות:
- $i_1 : V_1 \to V_1 \oplus V_2,\ i_1(x)=(x,0)$

- $i_2 : V_2 \to V_1 \oplus V_2,\ i_2(x) = (0,x)$
- $p_1 : V_1 \oplus V_2 \to V_1,\ p_1(x,y) = x$
- $p_2 : V_1 \oplus V_2 \to V_2,\ p_2(x,y) = y$

מימד של סכום ישיר. יהיו $x_1,\dots,x_m$ בסיס ב- V_1 , ואילו $y_1,\dots,y_n$ בסיס ב- V_2.
אזי הקבוצה $(x_1,0),\dots,(x_m,0),(0,y_1),\dots,(0,y_n)$ מהווה בסיס ב- $V_1 \oplus V_2$ (הסבירו מדוע).
לכן, מתקיים השוויון $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$.

העתקות לינאריות מ- $V_1 \oplus V_2$ ל- W.
יהיו $f_1 : V_1 \to W$ ו- $f_2 : V_2 \to W$ העתקות לינאריות. נגדיר העתקה לינארית $f : V_1 \oplus V_2 \to W$ ע"י הנוסחה $f(x,y) = f_1(x) + f_2(y)$. בכיוון הנגדי, אם נתונה העתקה לינארית $f : V_1 \oplus V_2 \to W$, העתקות $f_i : V_i \to W$ מוגדרות ע"י הנוסחאות:

$$f_1(x) = f(x,0),\ f_2(x) = f(0,x).$$

קל לבדוק כי זה מגדיר התאמה חד-חד ערכית בין העתקות לינאריות $V_1 \oplus V_2 \to W$ לבין זוגות העתקות $f_1 : V_1 \to W,\ f_2 : V_2 \to W$).

העתקות לינאריות מ- W ל- $V_1 \oplus V_2$.
יהיו $f_1 : W \to V_1$ ו- $f_2 : W \to V_2$ העתקות לינאריות. נגדיר העתקה לינארית $f : W \to V_1 \oplus V_2$ ע"י הנוסחה $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. בכיוון הנגדי, אם נתונה העתקה לינארית $f : W \to V_1 \oplus V_2$,
העתקות $f_i : W \to V_i$ מוגדרות ע"י הנוסחה $f_i(x) = p_i(f(x))$ כאשר $p_i : V_1 \oplus V_2 \to V_i$ מוגדרים כמו דלעיל. כמו בסעיף הקודם, קל לבדוק כי נוסחאות אלה מגדירות התאמה חד-חד-ערכית בין העתקות לינאריות $W \to V_1 \oplus V_2$ לבין
זוגות העתקות $f_1 : W \to V_1,\ f_2 : W \to V_2$).

7. קשר בין סכום ישיר לבין סכום תתי-מרחב.
יהיו V_1, V_2 שני תתי-מרחב ב- W . נתבונן בהעתקות <u>שיכון $f_i : V_i \to W$</u> (המוגדרות ע"י הנוסחה $f_i(x) = x$). לפי הסעיף הקודם,זה מגדיר העתקה $f : V_1 \oplus V_2 \to W$ (המוגדרת ע"י הנוסחה $f(x,y) = x + y$). התמונה של f היא בדיוק הסכום של תתי-מרחב V_1 ו- V_2 ב- W .
בואו נחשב את הגרעין של f :

$$Ker(f) = \{(x,y) \mid x \in V_1, y \in V_2, x + y = 0\} = \{(x,-x) \mid x \in V_1 \cap V_2\}$$

אנחנו רואים כי הגרעין של f איזומורפי לחיתוך $V_1 \cap V_2$.
מסקנה. $\dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$.
ואמנם, בנינו העתקה לינארית f מ- $V_1 \oplus V_2$ שתמונתה $V_1 + V_2$ והגרעין שלה $V_1 \cap V_2$.

8. מרחב ההעתקות הלינאריות.
יהיו V, W שני מרחבים וקטוריים. נגדיר

$$Hom(V,W)$$

– אוסף ההעתקות הלינאריות מ- V ל- W.
נגדיר ב- $Hom(V,W)$ מבנה של מרחב וקטורי.

- אם $f : V \to W$ העתקה לינארית ואם $c \in F$, $cf : V \to W$ מוגדרת ע"י הנוסחה $(cf)(x) = c \cdot f(x)$.

- אם $f,g:V\to W$ העתקות לינאריות, $f+g:V\to W$ מוגדרת ע"י הנוסחה $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.

קל לבדוק כי פעולות סכום וכפל בסקלר שהגדרנו מגדירות על $Hom(V,W)$ מבנה של מרחב וקטורי.

דוגמה. נניח $V=F^n, W=F^m$. אנחנו יודעים כי העתקות לינאריות מתוארות ע"י מטריצות $m\times n$. קל לראות (כדאי לבדוק) כי פעולות חיבור וכפל בסקלר ב-$Hom(V,W)$ מתאימות לפעולות ב-$Mat_{m,n}(F)$.

יש לציין כי המקרה הכללי לא שונה בהרבה מהדוגמה דלעיל.

מימד. יהי $x_1,\ldots,x_n$ בסיס ב-V, ואילו $y_1,\ldots,y_m$ בסיס ב-W.
נגדיר העתקה לינארית $f_{ij}:V\to W$ כהעתקה המעבירה x_j ל-y_i, ושאר איברי הבסיס – לאפס:

$$f_{ij}(x_k)=\begin{cases} y_i, & k=j \\ 0, & k\neq j\end{cases}$$

נבדוק כי f_{ij} מהווים בסיס ב-$Hom(V,W)$: אם $f:V\to W$ ניתנת ע"י המטריצה $A=(a_{ij})$ בבסיסים x_i ו-y_j, אז $f(x_k)=\sum a_{ik}y_i$ וזה אומר בדיוק כי $f=\sum_{i,k}a_{ik}f_{ik}$. כיוון שפירוק זה יחיד, f_{ij} גם בלתי-תלויים.

בפרט, אנחנו מסיקים כי $\dim Hom(V,W)=\dim V\cdot\dim W$.

9. מרחב דואלי.

יהי F שדה, V מרחב וקטורי מעל F. מרחב דואלי V^* הוא אוסף העתקות לינאריות $f:V\to F$. לכן, $V^*=Hom(V,F)$. כמו בסעיף הקודם, בסיס $x_1,\ldots,x_n$ ב-V מגדיר בסיס $x_1^*,\ldots,x_n^*$ ע"י הנוסחה $x_i^*(x_j)=\delta_{ij}$ (דלתא של קרונקר).

בפרט, אם $\dim V=n$, אז $\dim V^*=n$.

נציין כי הדבר מפסיק להיות נכון עבור מרחבים וקטוריים בעלי מימד אינסופי.

נציין כי למרות שוויון המימדים, אין דרך קנונית להגדיר העתקה מ-V ל-V^*.

לעומת זאת, קל להגדיר העתקה $\varphi:V\to V^{**}$.

ואמנם, יהי $x\in V$. $\varphi(x)$ היא העתקה מ-V^* ל-F הניתנת ע"י הנוסחה $\varphi(x)(f)=f(x)$.

אם $V=F^n$ אוסף עמודות באורך n, נוח מאוד להציג את V^* כאוסף **שורות** באורך n.
אז, אם $f\in V^*$ ואם $x\in V$, $f(x)$ היא תוצאת כפל של שורה f בעמודה x.

10. העתקה צמודה. תהי עתה $f:V\to W$ העתקה לינארית. אם $\alpha:W\to F$ איבר ב-W^* אז ההרכבה $\alpha\circ f:V\to W\to F$ איבר ב-V^*. לכן, העתקה לינארית $f^*:W^*\to V^*$ מוגדרת ע"י הנוסחה $f^*(\alpha)=\alpha\circ f$. היא נקראת <u>ההעתקה הצמודה ל-f</u>.

אם עכשיו נבחר בסיסים $x_1,\ldots,x_n$ ב-V ו-$y_1,\ldots,y_m$ ב-W אז ניתן לרשום את f ע"י מטריצה $A\in Mat_{m,n}(F)$ בבסיסים אלה. ואילו את ההעתקה הצמודה f^* ניתן לרשום בבסיסים הדואליים $x_1^*,\ldots,x_n^*$ ו-$y_1^*,\ldots,y_m^*$ ע"י מטריצה $A'\in Mat_{n,m}(F)$.

משפט. המטריצות A ו-A' מוחלפות זו לזו.
הוכחה. חישוב ישיר.

יהיו $A=(a_{ij}), A'=(b_{ij})$. לפי הגדרה של A, $f(x_j)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$. נחשב אז את הערכים של A'. לפי הגדרה, $f^*(y_j^*)=\sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_i^*$. מהצד השני,

$$f^*(y_j^*)(x_k)=y_j^*(f(x_k))=y_j^*(\sum_{i=1}^{m} a_{ik} y_i)=a_{jk}$$

ולכן

$$f^*(y_j^*)=\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i^* .$$

זה מסיים את ההוכחה.