העתקות לינאריות.
גרעין ותמונה. אופרטורים לינאריים.

1 . נקבע שדה F . תהי $f:V\to W$ העתקה לינארית מעל F .
גרעין של f מוגדר כקבוצה
$Ker(f)=\{x\in V \mid f(x)=0\}$.
למה. $Ker(f)$ הוא תת-מרחב וקטורי של V. (בדקו לבד!)
למה. העתקה לינארית f היא חח"ע אם ורק אם $Ker(f)=0$.
הוכחה. אם f חח"ע ואם $f(x)=0$ אז $f(x)=f(0)$ וזה גורר $x=0$.
בכיוון הנגדי, אם $Ker(f)=0$ ואם $f(x)=f(y)$ אז לפי הלינאריות
$f(x-y)=f(x)-f(y)=0$ וזה גורר כי $x-y=0$ זאת אומרת $x=y$.

2. **למה.** תמונה $\mathrm{Im}(f)$ של העתקה לינארית f היא תת-מרחב וקטורי ב- W. (בדקו לבד!)
ברור כי העתקה לינארית f על אם ורק אם $\mathrm{Im}(f)=W$.

3. כדי להבין יותר טוב במה מדובר, כדאי להתבונן במקרה $V=F^n, W=F^m$. אז העתקה לינארית ניתנת ע"י מטריצה A. אזי הגרעין הוא $\{x \mid Ax=0\}$ זאת אומרת מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית המוגדרת ע"י A . התמונה היא אוסף עמודות $b\in F^m$ שעבורן יש פתרון למערכת $Ax=b$. במילים אחרות, $\mathrm{Im}(f)=Col(A)$.

לפי מה שאנחנו יודעים על פתרון מערכת משוואות, המימד של הגרעין $\{x \mid Ax=0\}$ שווה ל- $n-rk(A)$ (פעם קראנו למספר זה מספר הפרמטרים בפתרון הכללי).
לעומת זאת, מימד התמונה הוא $\dim Col(A)$ – קראנו למספר זה דרגת עמודות $rk^c(A)$ של A . כיוון שידוע כבר כי $rk(A)=rk^c(A)$, מקבלים לבסוף
$\dim Ker(f)+\dim \mathrm{Im}(f)=n-rk(S)+rk^c(A)=n$.
אנו מתכוונים עתה לתת הוכחה אחרת לטענה זו.

4. **משפט.** תהי $f:V\to W$ העתקה לינארית. אזי $\dim Ker(f)+\dim \mathrm{Im}(f)=\dim V$.

הערה: מה טעם לחפש הוכחה נוספת לעובדה שכבר יודעים?
ההוכחה שניתנה בסעיף הקודם מבססת על השוויון $rk(A)=rk^c(A)$ שהוכחנו קודם ע"י ניתוח של שיטת גאוס. ההוכחה החדשה תהיה מבוססת על מושג המימד (ולכן היא הרבה יותר קונצפטואלית). אפשר לראות בהוכחה זו דרך חדשה להוכיח את השוויון $rk(A)=rk^c(A)$.

5. **הוכחה.** אנחנו נבחר בסיסים בכל אחד מהמרחבים שבנידון.
- נבחר בסיס $\{x_1,\dots,x_k\}$ בגרעין $Ker(f)$.
- נבחר בסיס $\{y_1,\dots,y_l\}$ בתמונה $\mathrm{Im}(f)$.
- עבור כל $i=1,\dots,l$ נמצא איבר $z_i\in V$ כך ש- $f(z_i)=y_i$ – הדבר אפשרי כי $y_i\in \mathrm{Im}(f)$.

עתה $\dim Ker(f)=k$, $\dim \mathrm{Im}(f)=l$, והמשפט יוכח אם נבדוק כי הקבוצה $\{x_1,\dots,x_k,y_1,\dots y_l\}$ מהווה בסיס ב- W. עלינו לבדוק שתי תכונות.

א. הקבוצה בת"ל. ואמנם, נניח כי $\sum_{i=1}^{k} a_i x_i + \sum_{j=1}^{l} b_j y_j = 0$. עלינו להסיק כי המקדמים a_i, b_j שווים לאפס. קודם כל, נפעיל f :

$$0 = f(\sum_{i=1}^{k} a_i x_i + \sum_{j=1}^{l} b_j y_j) = \sum b_j f(y_j) = \sum b_j z_j .$$

כיוון ש- z_j בלתי-תלויים, המקדמים b_j שווים לאפס. נתבונן שוב במשוואה המקורית.

עתה היא אומרת $\sum_{i=1}^{k} a_i x_i = 0$ וזה גורר $a_i = 0$ כי x_i גם בלתי-תלויים.

ב. נבדוק כי $\{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots y_l\}$ קבוצה פורשת ב- V . יהי $x \in V$. עלינו להציג את x כצירוף לינארי של x_i, y_j . נשתמש בטריק שעסינו בסעיף (א): נפעיל f .

האיבר $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, לכן ניתן להציגו כצירוף $f(x) = \sum_{j=1}^{l} b_j z_j$. נתבונן עתה בהפרש $x' = x - \sum_{j=1}^{l} b_j y_j$. מתקיים $f(x') = f(x) - \sum b_j z_j = 0$ לכן $x' \in Ker(f)$,

לכן ניתן להציג את x' כצירוף לינארי של x_i , $x' = \sum a_i x_i$. זה לבסוף נותן

$$x = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i + \sum_{j=1}^{l} b_j y_j .$$

המשפט הוכח.

6. **מסקנה.** העתקה לינארית f חח"ע אם ורק אם $\dim V = \dim \mathrm{Im}(f)$.

7. **מסקנה.** העתקה לינארית $f: V \to W$ על אם ורק אם $\dim Ker(f) = \dim V - \dim W$.

8. **מסקנה** *(מההוכחה)*. תהי $f: V \to W$ העתקה לינארית. ניתן למצוא בסיסים ב- V וב- W כך שהמטריצה של f בעלת צורה $A = (a_{ij})$ כאשר

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \le k \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

במקרה זה $k = \dim \mathrm{Im}(f)$.

הוכחה. כמו במשפט, נבחר איברים $\{y_1, \ldots, y_l, x_1, \ldots x_k, z_1, \ldots, z_l\}$ כך ש x_i מהווים בסיס ב- $Ker(f)$, $f(y_i) = z_i$, ו- z_i מהווים בסיס ב- $\mathrm{Im}(f)$. נשלים את הקבוצה האחרונה לבסיס ב- W. זה נותן את הבסיסים המבוקשים.

9. **אופרטורים לינאריים.**

כפי שראינו במשפט **5** כל העתקה $f: V \to W$ לינארית נראית פשוט יחסית אם לבחור בסיס מתאים ב- V וב- W. המצב משתנה כאשר המקור והיעד של f הם אותו מרחב וקטורי. במקרה זה מחפשים בסיס אחד למרחב $V = W$ בו להעתקה f תהיה צורה "נוחה".

העתקות לינאריות $f: V \to V$ נקראות <u>אופרטורים לינאריים</u>. חקר אופרטורים לינאריים נושא חשוב מאוד באלגברה לינארית. אנחנו נתבונן עתה במקרה $\dim V = 2$.

הגדרה. וקטור $x \in V$ השונה מאפס נקרא <u>וקטור עצמי של $f: V \to V$ המתאים לערך עצמי $c \in F$ אם</u> $f(x) = cx$.

באנגלית ערך עצמי נקרא eigenvalue , ואילו וקטור עצמי eigenvector .

בואו נחפש ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים עבור $f: V \to V$. נבחר בסיס ב- V באופן שרירותי ויהי A מטריצה של f בבסיס זה. מתקיים

$$(A-cI)x = 0 \Leftrightarrow Ax = cx.$$

לכן $c \in F$ הוא וקטור עצמי עבור ערך עצמי מסוים אם ורק אם המטריצה $A-cI$ איננה הפיכה. נזכיר:

למה. מטריצה $B = (b_{ij}) \in Mat_2(F)$ איננה הפיכה אם ורק אם שורותיה לא פרופורציונאליות וזה מתקיים אם ורק אם $\det(B) = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$ שווה לאפס.

נציב $B = A - cI$ ת נקבל משוואה

$$(a_{11}-c)(a_{22}-c) - a_{12}a_{21} = 0.$$

זאת משוואה ריבועית עבור $c \in F$.

מעתה אנחנו מניחים כי $F = C$ שדה המרוכבים. אז למשוואה ממעלה 2 יש שני פתרונות (שונים או זהים). נסמן אותם c_1 ו- c_2 .

מקרה $c_1 \neq c_2$. יהיו x_1 ו- x_2 וקטורים עצמיים עבור c_1 ו- c_2 . וקטורים אלה שונים מאפס והם לא יכולים להיות פרופורציונאליים כי יש להם ערכים עצמיים שונים. לכן, x_1 ו- x_2 מהווים בסיס. כיוון ש- $Ax_1 = c_1x_1, Ax_2 = c_2x_2$, האופרטור f מתאים בבסיס $\{x_1, x_2\}$ למטריצה אלכסונית $\begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$.

מקרה $c_1 = c_2 = c$. אחת האפשרויות $A = cI$ ברורה. אך מתברר כי יש עוד אפשרות אחת.

משפט. יהי f אופרטור על V, $\dim V = 2$. נניח כי ל- f שני ערכים עצמיים זהים (שווים ל- c) וש- $f \neq c \cdot id$. אזי קיים בסיס בו f ניתנת ע"י המטריצה $\begin{pmatrix} c & 1 \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

הוכחה. נסמן $g = f - c \cdot id$ כך של- g ערך עצמי 0 (כפול). זה אומר כי g לא חח"ע וגם לא על. לפי הנחה $g \neq 0$ כך שקיים $y \in V$ כך ש- $g(y) = x \neq 0$. וקטורים x, y לא פרופורציונליים

(כי אין ערך עצמי שונה מאפס), לכן מהווים בסיס בו g מתוארת ע"י המטריצה $\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$.

המשוואה למציאת ערכים עצמיים עבור מטריצה כזאת נראית כך:

$$c^2 - ac - b = 0$$

כדי שנקבל שני שורשים השווים לאפס, צריך להיות $a = b = 0$. זה מוכיח את המשפט.