העתקות לינאריות.

1. נזכיר כי העתקה $f:X\to Y$ היא חוק שמתאים לכל איבר $x\in X$ איבר $f(x)$ של Y.
לקבוצה X קוראים לפעמים <u>מקור</u> ולקבוצה Y <u>יעד</u>.

העתקה f נקראת *העתקת על* אם לכל $y\in Y$ קיים $x\in X$ כך ש- $f(x)=y$.
העתקה f נקראת חד-חד-ערכית (חח"ע) אם היא מעבירה איברים שונים ב- X אל איברים שונים ב- Y:

$$f(x)=f(x')\Rightarrow x=x'.$$

הרכבת העתקות. אם $f:X\to Y$ ו- $g:Y\to Z$ שתי העתקות, מגדירים את *ההרכבה* $g\circ f:X\to Z$ ע"י הנוסחה

$$g\circ f(x)=g(f(x)).$$

העתקת זהות $id_X:X\to X$ מוגדרת ע"י $id(x)=x$ (אם ברור באיזו קבוצה X מדובר, משמיטים את אינדקס X מהסימון).
העתקה $g:Y\to X$ נקראת *הופכית* ל- f אם $f\circ g=id_Y,\ g\circ f=id_X$.
העתקה ההופכית ל- f, מסומנת ב- f^{-1}.
טענה. העתקה f הפיכה אם ורק אם היא חח"ע ועל.
אם f הפיכה אז היא חח"ע: $f(x)=f(x')\Rightarrow f^{-1}(f(x))=f^{-1}(f(x'))\Rightarrow x=x'$.
אם f הפיכה אז היא על: $y\in Y\Rightarrow f(f^{-1}(y))=y$.
אם f חח"ע ועל אז f הפיכה: מגדירים $f^{-1}(y)=x\Leftrightarrow y=f(x)$.

תרגיל. תגדירו מה היא העתקה הפיכה משמאל (או מימין). הוכיחו כי העתקה על אם ורק אם היא הפיכה מימין. הוכיחו כי העתקה חח"ע אם ורק אם היא הפיכה משמאל.

2. יהי F שדה, V,W מרחבים וקטוריים מעל F.
העתקה $f:V\to W$ נקראת <u>לינארית</u> (או עוד יותר מדויק – לינארית מעל F – אם התכונות הבאות מתקיימות.
- $f(cx)=cf(x)$ לכל $x\in V,c\in F$.
- $f(x+y)=f(x)+f(y)$ לכל $x,y\in V$.

הערה. כל אחת מהתכונות דלעיל גוררת כי $f(0)=0$ (בדקו את זה!).

3. **דוגמאות.**
- $V=W=F$. העתקה $f:F\to F$ לינארית אם ורק אם $f(x)=ax$ עבור $a\in F$ מסוים (רמז: יש להניח $a=f(1)$).
- טיפה יותר כללי, אם $V=F$, העתקה לינארית $f:F\to W$ מוגדרת באופן יחיד ע"י $w=f(1)\in W$: אז $f(c)=cw$.
- $V=F^n,W=F^m$. תהי $A\in Mat_{m,n}(F)$. אזי העתקה $f:V\to W$ הניתנת ע"י הנוסחה $f(x)=Ax$, לינארית.

  (הערה: יותר מאוחר נראה כי כל העתקה לינארית $F^n\to F^m$ ניתנת ע"י מטריצה).
- $V=W=F[x]$ הפולינומים, f מעבירה כל פולינום לנגזרת שלו:

  $$f(\sum a_nx^n)=\sum na_nx^{n-1}.$$
- בדוגמה הקודמת אפשר לקחת W אוסף כל הפונקציות על R, V אוסף הפונקציות הגזירות, $F=R$.

4. תאור העתקות לינאריות ע"י מטריצות .

יהי $\{x_1,\ldots,x_n\}$ בסיס ב- V, ואילו $\{y_1,\ldots,y_m\}$ בסיס ב- W.

תהי $f:V\to W$ העתקה לינארית. נתאים לה עתה מטריצה $A\in Mat_{m,n}(F)$,

$A=(a_{ij})$ כדלקמן.

נציג את $f(x_i)$ כצירוף לינארי של y_j ונרשום את המקדמים המתקבלים כעמודה i של המטריצה:

$$f(x_i)=\sum a_{ji}y_j$$

מטריצה $A=(a_{ij})$ שהתקבלה מתארת f :

אם $x=\sum c_i x_i$, אז

$$f(x)=f(\sum c_i x_i)=\sum c_i f(x_i)=\sum c_i(\sum a_{ji}y_j)=\sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n}a_{ji}c_i)y_j\ .$$

החישוב שלנו אומר כי, כדי לחשב את קואורדינאטות של $f(x)$ בבסיס $\{y_1,\ldots,y_m\}$, צריך להכפיל את מטריצה A בעמודת הקואורדינאטות של x בבסיס $\{x_1,\ldots,x_n\}$.

5. הרכבת העתקות לעומת כפל מטריצות.

למה. הרכבת העתקות לינאריות גם היא לינארית. (תוכיחו לבד!)

יהיו V,W,U מרחבים וקטוריים מעל F ויהיו $\{x_1,\ldots,x_n\}$ בסיס ב- V,

$\{y_1,\ldots,y_m\}$ בסיס ב- W , $\{z_1,\ldots,z_k\}$ בסיס ב- U.

העתקות לינאריות $f:V\to W$ ו- $g:W\to U$ ניתנות בבסיסים המתאימים ע"י המטריצות A ו- B .

משפט. ההרכבה $g\circ f:V\to U$ ניתנת בבסיסים $\{x_1,\ldots,x_n\}$ ו- $\{z_1,\ldots,z_k\}$ ע"י המטריצה BA .

הוכחה. חישוב פשוט. עלינו לפרק $g(f(x_i))$ לפי הבסיס $\{z_1,\ldots,z_k\}$.

ואמנם, $f(x_i)=\sum a_{ji}y_j$, לכן

$$g(f(x_i))=\sum_{j=1}^{m}a_{ji}g(y_j)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{k}a_{ji}b_{rj}z_r=\sum_{r=1}^{k}(\sum_{j=1}^{m}b_{rj}a_{ji})z_r\ ,$$

וזה נותן את הנדרש.

6. מעבר לבסיס חדש.

מטריצה של העתקה לינארית תלויה לא רק בהעתקה עצמה, אלא גם בבחירת בסיסים במרחבי מקור ויעד.

נלמד עתה מה קורה למטריצת ההעתקה כאשר עוברים לבסיס אחר.

יהיו $\{x_1,\ldots,x_n\}$ ו- $\{x'_1,\ldots,x'_n\}$ שני בסיסים של אותו מרחב V.

נשתמש בבניה של סעיף 4 עבור העתקה $id:V\to V$ כאשר נשתמש בבסיס $\{x'_1,\ldots,x'_n\}$ במרחב מקור ובבסיס $\{x_1,\ldots,x_n\}$ במרחב יעד.

נקבל מטריצה ריבועית $C=(c_{ij})\in Mat_n(F)$ שעמודה ה- i שלה מתקבלת מהמקדמים של הפירוק

$$x'_i=\sum c_{ji}x_j\ .$$

מטריצה זו נקראת *מטריצת מעבר* מהבסיס $\{x_1,\ldots,x_n\}$ לבסיס $\{x'_1,\ldots,x'_n\}$.

תהי עתה A מטריצה של $f:V\to W$ כאשר אנו משתמשים בבסיס $\{x_1,\ldots,x_n\}$

עבור V ובבסיס $\{y_1,\ldots,y_m\}$ עבור W. יהי $\{x_1',\ldots,x_n'\}$ בסיס חדש ב- V עם מטריצת מעבר C, ויהי $\{y_1',\ldots,y_m'\}$ בסיס חדש ב- W עם מטריצת מעבר D.
המשפט שהוכחנו בסעיף הקודם נותן עתה

מסקנה. המטריצה A' של f בבסיסים החדשים ניתנת ע"י הנוסחה

$$A' = D^{-1}AC.$$

הוכחה. מטריצות מעבר מ-$\{y_1',\ldots,y_m'\}$ ל- $\{y_1,\ldots,y_m\}$ הופכית ל- D.
כדי למצוא מטריצה של f בבסיסים החדשים, או מרכיבים שלוש העתקות –
הראשונה היא id_V בבסיסים חדש וישן (זה נותן מטריצת מעבר C),
אחר-כך העתקה f בבסיסים הישנים (זה נותן את מטריצה A) ובסוף
העתקה id_W בבסיסים ישן וחדש בהתאם – זה נותן את מטריצה D^{-1}.
התוצאה היא מכפלת המטריצות.