מרחבים וקטוריים.
תת-מרחב הנפרש ע"י קבוצת וקטורים. מרחב שורות, מרחב עמודות.

1. יהי F שדה, V מרחב וקטורי מעל F, $X=\{x_1,\dots,x_n\}\subseteq V$. **תת-מרחב ב- V הנפרש (הנוצר) ע"י X** (הסימון: $Span(X)$ או $Span\{x_1,\dots,x_n\}$) הוא אוסף כל איברי V בעלי ייצוג כצירוף לינארי של x_i:

$$Span(X)=\left\{x\in V \mid \exists c_i : x=\sum c_i x_i\right\}.$$

2. **למה. א.** $Span(X)$ תת מרחב וקטורי של V.

ב. אם W תת-מרחב ב- V המכיל את כל ה- x_i, אז $Span(X)\subseteq W$.

הוכחה. א. יש להוכיח כי אם $x\in Span(X)$ אז $cx\in Span(X)$ וגם כי אם $x,y\in Span(X)$ אז $x+y\in Span(X)$. נבדוק את התכונה הראשונה. אם $x\in Span(X)$ אז $x=\sum c_i x_i$ עבור בחירה מסוימת של c_i. אזי $cx=\sum cc_i x_i$. גם כן אם $x=\sum c_i x_i$ ו- $y=\sum d_i x_i$ אז $x+y=\sum (c_i+d_i)x_i$.

ב. אם $x_i\in W$ אז $c_i x_i\in W$ לכל i ולכן $\sum c_i x_i \in W$.

3. **דוגמא.**
תהי $A\in Mat_{m,n}(F)$. יהיו $a_1,\dots a_m$ שורותיה של A. נגדיר $Rows(A)=Span\{a_1,\dots,a_m\}$ – מרחב השורות של A.
באותה דרך מגדירים מרחב עמודות של A, $Col(A)=\{a^1,\dots,a^n\}$, כאשר $a^1,\dots,a^n$ עמודות של המטריצה A.

4. **תכונות של $Rows(A)$.**
תת-מרחב הדורות $Rows(A)$ לא משתנה כאשר מפעילים על A פעולות יסוד:
כפי שראינו קודם, הפעלת פעולת יסוד שקולה להכפלה במטריצת יסוד E מצד שמאל.
במקרה של פעולה (מטריצה) E_{ij} אנחנו מקבלים אותן שורות (אך בסדר אחר).
במקרה של פעולה $E_i(\lambda)$ השורה מס' i מוכפלת ב- λ - וזה בברור לא משנה את מרחב השורות.
במקרה $E=E_{ij}(c)$ השורה החדשה מס' i, a_i', ניתנת ע"י הנוסחא $a_i'=a_i+ca_j$. זה אומר כי המרחב $Rows(EA)$ מוכל במרחב $Rows(A)$. ההכלה $Rows(A)\subseteq Rows(EA)$ נובעת מכך שפעולות יסוד הפיכות.

קל לחשב מימד של מרחב שורות עבור מטריצה בצורת מדרגה.
תהי A בצורת מדרגה, כך שהשורות $a_1,\dots,a_k$ שונות מאפסת ו- $a_{k+1}=\dots=a_m=0$.
אזי $\dim Rows(A)=k$. הנה ההוכחה. נניח כי $\sum_{i=1}^{k} c_i a_i=0$. אם $a_{1j}\neq 0$ הרכיב השמאלי ביותר השונה מאפס בשורה הראשונה, אז $a_{ij}=0$ עבור $1<i$. כיוון שהרכיב ה- j בסכום $\sum_{i=1}^{k} c_i a_i$ שווה לאפס, $c_1=0$. עכשיו אנחנו יכולים להוכיח באותה דרך כי $c_2=0$, וכו'.

כמסקנה משתי הטענות דלעיל אנחנו מסיקים לבסוף כי $\dim Rows(A)=rk(A)$.

5. **תכונות של $Col(A)$.**

קודם כל, יש לציין תפקיד חשוב של המרחב $Col(A)$: למערכת משוואות $Ax=b$ קיים פתרון אם ורק אם $b\in Col(A)$. ואמנם, העמודה x היא פתרון של המערכת אם ורק אם $x_1a^1+\ldots+x_na^n=b$.

גם כאן קל למצוא את המימד של $Col(A)$ במקרה ש- A בצורת מדרגה. כי אם ל-A k שורות השונות מאפס, המרחב $Col(A)$ הוא בדיוק אוסף העמודות b המקיימות $b_{k+1}=\ldots=b_m=0$. לכן, אם A בצורת מדרגה אז $\dim Col(A)=k=rk(A)$ – זהה למימד מרחב השורות. לצערנו, מרחב העמודות משתנה כאשל אנחנו מבצעים פעולות יסוד. למרות זאת, עדין נכון כי $\dim Col(A)=rk(A)$ עבור כל מטריצה A. כדי להוכיח זאת, אנחנו נעקוב אחרי מה שקורה כשמבצעים פעולת יסוד.

למה. *תהי E מטריצה הפיכה (למשל, מטריצת יסוד). אזי $b\in Col(A)$ אם ורק אם $Eb\in Col(EA)$.*

הוכחה. כי המשוואות $Ax=b$ ו- $EAx=Eb$ שקולות אם E מטריצה הפיכה.

משפט. $\dim Col(A)=rk(A)$ עבור כל מטריצה A.

הוכחה. הטענה כבר הוכחה עבור A בצורת מדרגה. לכן, מספיק לנו לבדוק כי אם E הפיכה, $\dim Col(A)=\dim Col(EA)$. אך הלמה דלעיל גוררת כי אם $\{v_1,\ldots,v_k\}$ בסיס ב- $Col(A)$ אז $\{Ev_1,\ldots,Ev_k\}$ בסיס ב- $Col(EA)$.

ואמנם, אם $\sum_{i=1}^{k}c_iAv_i=0$ אז $\sum_{i=1}^{k}c_iv_i=A^{-1}(\sum c_iAv_i)=0$ ואז $c_i=0$ כי v_i בת"ל.

וכיוון ש- v_i פורשים את $Col(A)$, Ev_i פורשים $ECol(A)=Col(EA)$.

המשפט הוכח.

נציין כי כמו שקיבלנו בסעיף הקודם כי $\dim Rows(A)=rk(A)$, אפשר היה להסיקכי מימד מרחב העמודות שווה לדרגת העמודות. לכן, אנחנו בעצם הוכחנו כי דרגת השורות של מטריצה שווה לדרגת עמודותיה.