מרחבים וקטוריים
קבוצות בלתי-תלויות. קבוצות פורשות. בסיס.

1. **קבוצה בלתי-תלויה לחנארית.** יהי F שדה, V מרחב וקטורי מעל F .
קבוצה $X=\{x_1,\dots,x_n\}$ נקראת קבוצה בלתי-תלויה לינארית (בת"ל) אם התכונה הבאה מתקיימת:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0 \Rightarrow c_1=\dots=c_n=0 \ .$$

דוגמא. $V=F^n$ אוסף עמודות באורך n . נגדיר $x_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, x_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots, x_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$

אזי הצירוף הלינארי $\sum c_i x_i=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}$ שווה לאפס אם ורק אם כל המקדמים c_i שווים לאפס.

דוגמא. תהי $A\in Mat_{m,n}(F)$ מטריצה *בצורת מדרגה*.
שורותיה $a_1=(a_{11},\dots,a_{1n})$, ... , $a_k=(a_{k1},\dots,a_{kn})$ השונות מאפס – בלתי-תלויות לינארית.
בואו נוכיח את זה.
נניח כי $c_1a_1+\dots+c_ka_k=0$. אם הרכיב הראשון השונה מאפס בשורה a_1 הוא במקום ה-t
(כך ש-$a_{1t}\neq 0$ אך $a_{1i}=0$ עבור $i<t$) אז בשאר השורות הרכיב ה-t שווה לאפס – כי המטריצה A בצורת מדרגה. לכן, השוויון $\sum c_i a_i=0$ גורר כי $c_1a_{1t}=0$ זאת אומרת כי $c_1=0$.
עכשיו אנחנו יכולים לזרוק את a_1 מרשימת השורות והאותה דרך להוכיח כי $c_2=0$, וכו'.

דוגמא. וקטור בודד, או, יותר מדויק, קבוצה $X=\{x\}$ היא בת"ל אם ורק אם $x\neq 0$.
דוגמא. אם בקבוצה X יש וקטור ה-0, אז X לא בת"ל. ואמנם, אם, למשל, $x_i=0$
אז $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i=0$ כאשר $c_i=1$ ו-$c_j=0$ עבור $j\neq i$.
דוגמה. אם $X=\{x,y\}$ שני וקטורים השונים מאפס, אז X בת"ל אמ"ם הוקטורים לא פרופורציונאליים (לא קיים $c\in F$ כך ש- $y=cx$).

דוגמה. שלושה וקטורים $x,y,x+y$ לא בת"ל.

2. **קבוצה פורשת.** קבוצה $X=\{x_1,\dots,x_n\}$ נקראת קבוצה פורשת אם כל איבר $v\in V$ ניתן להציג כצירוף לינארי של x_i : $\exists c_i : \sum c_i x_i = v$.

דוגמא. הדוגמא הראשונה של קבוצה בלתי-תלויה (ראה מעלה) היא גם פורשת.

דוגמא. תהי $A \in Mat_{m,n}(F)$ ויהי $V \subseteq F^m$ אוסף וקטורים b שעבורם למערכת $Ax = b$ קיים פתרון. אנחנו יודעים כי V הוא מרחב וקטורי. אני טוען כי *העמודות של A מהוות קבוצה פורשת של V.*

נסמן את עמודותיה של A ב- $a^1, \ldots, a^n$. קודם כל, יש לוודא כי $a^i \in V$. ואמנם, $Ax_i = a^i$, כאשר x_i עמודה עם 1 ברכיב ה- i ו- 0 בשאר הרכיבים.

עתה, אם $b \in V$, קיימת עמודה $x = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ שעבורה $Ax = b$ ואז $x = \sum c_i x_i$,

$b = Ax = A\sum c_i x_i = \sum c_i Ax_i = \sum c_i a^i$. זה מוכיח את הטענה.

3. קבוצה $X \subseteq V$ שהיא גם בת"ל וגם פורשת, נקראת *בסיס*.
לכל מרחב וקטורי קיים בסיס. לכל שני בסיסים של אותו מרחב וקטורי אותו מספר איברים.
טענות אלה וגם טענות נוספות אנחנו נוכיח עכשיו, אך לא בכלליות המירבית.

כדי לא להכנס לתחום של תורת הקבוצות האינסופיות שאנחנו לא יודעים עדיין, נעסוק עתה רק במרחבים וקטוריים "לא גדולים במיוחד" – מרחבים וקטוריים נוצרים סופית.

הגדרה. V נקרא נוצר סופית אם קיימת קבוצה סופית פורשת.
דוגמאות: כל דוגמאות של מ"ו שהוזכרו עד כה הן מ"ו נוצרים סופית.
דוגמא של מ"ו שלא נוצר סופית:
אוסף פולינומים מעל שדה F , הסימון – $F[x]$. כל פולינום הוא ביטוי

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \quad a_i \in F .$$

חיבור פולינומים וכפלם בסקלר מוגדרים באופן טבעי.
דרגת הפולינום (השונה מאפס) היא החיזקה של x הגדולה ביותר, שהמקדם שלה שונה מאפס.
דרגת סכום הפולינומים לא עולה על מכסימום דרגות המחוברים. לכן, אילו $F[x]$ היה נוצר סופית, דרגות כל הפולינומים היו חסומות מלעיל. לכן, מרחב זה אינו נוצר סופית.

4. **משפט.** תהי X קבוצה פורשת סופית במ"ו V . אזי קיימת תת-קבוצה $B \subseteq X$ המהווה בסיס של V .

הוכחה. אנחנו נוכיח כי אם X לא בת"ל, אפשר לזרוק מ- X איבר אחד, כך שנקבל שוב קבוצה פורשת. זה יוכיח את המשפט כי אנחנו נוכל לזרוק מ- X איברים עד שבסוף נקבל קבוצה בת"ל ופורשת.

תהי $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ קבוצה פורשת. אם היא לא בת"ל, קיימים סקלרים $c_i, \quad i = 1, \ldots, n$, לא כולם שווים לאפס, כך ש- $\sum c_i x_i = 0$. נניח כי $x_i \neq 0$. אז אפשל לבטא מהמשוואה x_i :

$$x_i = -c_i^{-1}(\sum_{j \neq i} c_j x_j),$$

וזה גורר כי גם $X \setminus \{x_i\}$ קבוצה פורשת.
המשפט הוכח.

5. **מסקנה.** לכל מרחב וקטורי נוצר סופית קיים בסיס.

6. **משפט.** יהי V מרחב וקטורי, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ו- $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ שני בסיסים.

אזי $m=n$.

הוכחה. קבוצה X פורשת, לכן $y_i=\sum a_{ij}x_j$.

קבוצה Y בת"ל, לכן $\sum c_i y_i=0 \Rightarrow c_i=0$. נציב את הביטוי ל- y_i ונקבל:

$$\sum c_i a_{ij} x_j=0 \Rightarrow c_i=0$$

נציין כי אם $\sum c_i a_{ij}=0$ לכל j אז על אחת כמה וכמה $\sum c_i a_{ij} x_j=0$ ולבסוף אנו מקבלים כי $\sum c_i a_{ij}=0$ לכל j גורר כי $c_i=0$ לכל i .

את הטענה האחרונה ניתן לפרש כהעדר פתרונות לא טריוויאליות למערכת משוואות הומוגניות: המערכת כאן ניתנת על-ידי המטריצה $A^t=(a_{ji})$ ועמודת הנעלמים היא $(c_1,\ldots,c_m)$.

במקרה זה שיטת החילוץ של גאוס אומרת כי $m\le n$.

לבסוף, כיוון שתפקידיהם של X ו- Y (ובהתאם, של m ו- n) ניתן להחליף, מקבלים אנו כי גם $n\le m$. לכן, $m=n$. המשפט הוכח.

7. **הגדרה.** יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. המימד של V, $\dim V$, הוא מספר איברים בבסיס של V.

8. **מסקנה.** תהי $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ קבוצה פורשת של V . אזי $n\ge \dim V$. אם מתקיים השוויון, אזי X בסיס.

9. **משפט.** תהי $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ קבוצה בת"ל ב- V . אזי $n\le \dim V$. אם מתקיים השוויון, אזי X בסיס.

הוכחה דומה מאוד להוכחה של משפט 4. תהי $Y=\{y_1,\ldots,y_m\}$ קבוצה פורשת של V.
כמו ב-4, נתחיל בקבוצה פורשת $X\cup Y$, וננסה לזרוק ממנה חלק מאיברי Y כדי לקבל קבוצה בת"ל ופורשת.

נניח כי $X\cup Y$ פורשת אך לא בת"ל. זה אומר כי קיימים סקלרים c_i, d_j כך ש-

$$\sum c_i x_i+\sum d_j y_j=0 \text{ .}$$

עכשיו, לא יתכן כי $d_j=0$ כולם כי X בת"ל. לכן, אפשר לזרוק אחד ה- y_j .

10. **מסקנה. אם** V מרחב וקטורי ו- $W\subseteq V$ תת-מרחב, אז $\dim W\le \dim V$. אם השוויון מתקיים, אז $W=V$.