מרחבים וקטוריים
דוגמאות. תתי-מרחב.

1. יהי F שדה. נסמן ב- F^n אוסף עמודות באורך n . אפשך לחבר עמודות (רכיב רכיב) ולהכפיל עמודה במספר. הנוסחאות:

$$\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \; , \; \begin{pmatrix} ca_1 \\ \vdots \\ ca_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot c \; .$$

כל האכסיומות של מרחב וקטורי מתקיימות – הן נובעות מהתכונות של שדה. אנחנו נבדוק לדוגמא רק חוק קיבוץ לפעולת חיבור – שאר החוקים נבדקים בדיוק באותה דרך.

בדיקת חוק הקיבוץ. עלינו לבדוק כי $(x+y)+z = x+(y+z)$ לכל $x,y,z \in F^n$.

ואמנם, אם $z = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, אז $(x+y)+z = \begin{pmatrix} (a_1+b_1)+c_1 \\ \vdots \\ (a_n+b_n)+c_n \end{pmatrix}$,

ואילו $x+(y+z) = \begin{pmatrix} a_1+(b_1+c_1) \\ \vdots \\ a_n+(b_n+c_n) \end{pmatrix}$. עכשיו השוויון נובע מחוק הקיבוץ בשדה F .

2. F שדה, $V = Mat_{m,n}(F)$. פעולות חיבור מטריצות וכפל מטריצות בסקלר ידועות לנו היטב.

הדוגמה הקודמת F^n היא המקרה הפרטי של מרחב המטריצות: $Mat_{n,1}(F)$.

נציין כי באותה דרך ניתן להגדיר גם מרחב $Mat_{1,n}(F)$ שאיבריו שורות $(a_1,\ldots,a_n),\ a_i \in F$.

אין הבדל גדול בין מרחב העמודות F^n למרחב השורות (אני גם לפעמים אסמן אותו ב- F^n !)

3. המרחב הווקטורי "הכי קטן" – מכיל רק איבר אחד – הוא איבר האפס. הסימון המקובל הוא $\{0\}$ או אפילו 0 .

4. אם F שדה, $V = F$ הוא גם מרחב וקטורי מעל עצמו. אפשר לזהות איברי שדה עם עמודות באורך 1, כך שאפשר לומר $F = F^1$.

5. הכללה קלה של הדוגמא הקודמת: יהיו $F \subseteq E$ שני שדות. אז ניתן להסתכל על E כעל מרחב וקטורי מעל F . למשל, שדה המרוכבים C הוא מרחב וקטורי מעל R. יתר על כן, כפי שאנחנו יודעים, מספר מרוכב מתואר על-ידי זוג מספרים ממשיים – חלקו הממשי והמדומה – ופעולות החיבור והכפל במספר ממשי הם

$$(a_1 + i\cdot b_1) + (a_2 + i\cdot b_2) = (a_1+a_2) + i\cdot(b_1+b_2)$$
$$c(a+ib) = ca + i(cb)$$

כך שהמרחב הוקטורי C מעל R אפשר לזהות עם R^2 – על-ידי התאמה של עמודה $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ למספר מרוכב $a+bi$.

6. יהי V מרחב וקטורי מעל F ותהי $W \subseteq V$ תת-קבוצה. נניח כי

- $0 \in W$
- $x \in W, c \in F \Rightarrow cx \in W$
- $x, y \in W \Rightarrow x + y \in W$

אזי על W ישנו מבנה של מרחב וקטורי, עם אותן פעולות חיבור וכפל בסקלר כמו ב- V.

במקרה זה W נקרא **תת-מרחב וקטורי של** V.

7. תהי $A \in Mat_{m,n}(F)$ מטריצה. נתבונן במערכת משוואות הומוגניות $Ax = 0$. כל פתרון הוא עמודה באורך n. בתחילת הקורס הוכחנו כי סכום הפתרונות פתרון, וכי פתרון המוכפל בסקלר גם הוא פתרון. לכן, אוסף פתרונות של מערכת הומוגנית מהווה מרחב וקטורי.

8. שוב $A \in Mat_{m,n}(F)$. נגדיר $V \subseteq F^m$ כאוסף וקטורים $b \in F^m$ שעבורם למערכת $Ax = b$ יש פתרון. אם $Ax = b$ אז $A(cx) = cb$ ואם, בנוסף, $Ax' = b'$ אז $A(x + x') = b + b'$.
לכן, V מרחב וקטורי.

8. **מרחבים** R^2 **ו-** R^3.
בקורסי גאומטריה ופיזיקה בבית ספר משתמשים במושג וקטור במישור או במרחב כקטע מכוון.
כל וקטור ניתן להציג ע"י קטע מכוון היוצא מראשית הצירים. את שני וקטורים כאלה מחברים בעזרת כלל המקבילית. כלל זה אומר כי כדי לחבר שני וקטורים $\vec{a}$ ו- $\vec{b}$ (היוצאים מראשית הצירים) יש לבנות מקבילית כך שהוקטורים מהווים את שתי צלעותיה וכתוצאה לקחת את האלכסון היוצא מראשית הצירים.

אם נרשום את כלל המקבילית בקואורדינטות, נקבל כי אוסף הוקטורים במישור הוא בעצם R^2, ואוסף הוקטורים במרחב הוא R^3.

9. בדוגמא זו השדה הוא $F_2 = \{0,1\}$.
נקבע קבוצה X (למשל, קבוצת הביטים (bit) בזיכרון המחשב).
מצב הזיכרון נקבע ע"י רשימה של הביטים הדלוקים, זאת אומרת, ע"י **תת-קבוצה** $A \subseteq X$.
ובכן, מניחים $V = \{A \subseteq X\}$ – אוסף תת-קבוצות ב- X (למשל, אם X בעלת 1000 איברים, אז V בעלת 2^{1000} איברים).
פעולת החיבור ניתנת ע"י הנוסחא

$$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

– פעולה זו נקראת גם הפרש סימטרי.
כפל בסקלר קל להגדיר כי $0A = 0, \quad 1A = A$.
תרגיל טוב הוא לבדוק כי אכן V הוא מרחב וקטורי מעל F_2.