גאומטריה אלגברית - 9

נזכיר

<u>הגדרה</u> מרחב מחויג הוא זוג $(X,\mathcal{O}_X)$ כאשר X מרחב טופולוגי ו- $\mathcal{O}_X$ - אלומת החוגים הקומוטטיביים.

<u>הגדרה</u> יהיו $(X,\mathcal{O}_X)$ ו $(Y,\mathcal{O}_Y)$ שני מרחבים מחויגים. איזומורפיזם שלהם הוא אוסף הנתונים הבאים:

- $f: X \to Y$ הומאומורפיזם של המרחבים <u>הטופולוגיים</u>
- איזומורפיזם של חוגים

$$f^*_U : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}U)$$

הנתון לכל קבוצה פתוחה U ב- Y

אוסף האיזומורפיזמים f^*_U צריך להיות מתואם עם הצמצום:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_Y(U) \arrow[r, "f^*_U"] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(f^{-1}U) \arrow[d] \\
\mathcal{O}_Y(V) \arrow[r, "f^*_V"] & \mathcal{O}_X(f^{-1}V)
\end{tikzcd}$$

לכל $V \subset U$.

<u>הגדרה</u> מרחב מחויג איזומורפי ל- $(Spec(A),\mathcal{O})$ נקרא סכימה <u>א</u>פינית המוגדרת ע"י A.

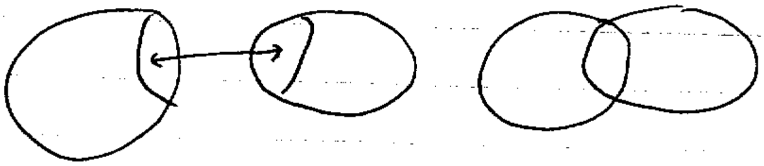
<u>הגדרה</u> מרחב מחויג $(X,\mathcal{O})$ נקרא סכמה אם לכל $x \in X$ קיימת סביבה פתוחה $U \subseteq X$ כך <u>שהצמצום</u> $(U,\mathcal{O}_X|_U)$ הוא סכימה אפינית.

כדי לבנות סכמות לא אפיניות, צריך להבין איך ניתן "להדביק אותן".

<u>הדבקה של מרחבים טופולוגיים.</u>

יהי $X = \cup U_i$ כיסוי פתוח של מרחב טופולוגי X.

איך ניתן לתאר X כתוצאה של הדבקה של U_i ?
ברור שצריך לזהות שני עותקים של $U_i\cap U_j$ - אחד בתוך U_i, והשני ב- U_j



הנה התיאור הפורמאלי:

נתון: • מרחבים טופולוגיים U_i, $i\in I$

• תת-קבוצות פתוחות $U_i\supset U_{ij}$, $i,j\in I$

• הומאומורפיזמים $\varphi_{ij}: U_{ij}\to U_{ji}$

ההומאומורפיזמים φ_{ij} ("נתוני הדבקה") מקיימים תכונות שנציין מאוחר יותר.

בהינתן נתונים אלה, נגדיר מרחב טופולוגי X ע"י הנוסחא:

$$X=\coprod_{i\in I} U_i /\sim$$

כאשר יחס שקילות על X מוגדר כיחס השקילות הנוצר ע"י זיהוי $x\sim\varphi_{ij}(x)$, $x\in U_{ij}\subset U_i\subset X$.

כתוצאה אנחנו רוצים לקבל מרחב טופולוגי X יחד עם כיסוי $X=\bigcup U_i'$ כך ש- $U_i'\approx U_i$, והתמונה של U_{ij} ב- U_i' תחת איזומורפיזם זה זהה עם $U_i'\cap U_j'$.
להלן התנאים על φ_{ij}:

- $\varphi_{ij}\circ\varphi_{ji}=id$
- הצמצומים של φ_{ik} ושל $\varphi_{jk}\circ\varphi_{ij}$ על $U_{ij}\cap U_{ik}$ זהים.

מבחינה פורמלית, נוח להוסיף עוד $\varphi_{ii}=id_{U_i}$.

<u>הערה</u>: התכונות של φ_{ij} אומרות כי יחס השקילות הנוצר ע"י $x\sim\varphi_{ij}(x)$, הוא:

$$x\sim y \iff (\exists i,j:\ x\in U_{ij},\ y=\varphi_{ij}(x))\vee(x=y)$$

עכשיו אנחנו רוצים לתאר הדבקה של מרחבים מתויגים.
זה אומר כי נתונים לנו מרחבים מתויגים $(U_i,\mathcal{O}_i)$,
תת-קבוצות פתוחות $U_{ij}\subset U_i$, ואיזומורפיזמים

$$\varphi_{ij} : (U_{ij}, \mathcal{O}_i|_{U_{ij}}) \xrightarrow{\sim} (U_{ji}, \mathcal{O}_j|_{U_{ji}})$$ של מרחבים מתויגים.

אנחנו מניחים כי אותן אכסיומות על φ_{ij} מתקיימות:

1) $\varphi_{ii}=id$

2) $\varphi_{ij}\circ\varphi_{ji}=id_{U_{ji}}$

3) $$\varphi_{ik}|_{U_{ij}\cap U_{ik}} = \varphi_{jk}\circ\varphi_{ij}|_{U_{ij}\cap U_{ik}}$$

בואו נבין איך לבנות את האלומה $\mathcal{O}$ על המרחב הטופולוגי X שמתקבל ע"י הדבקה של U_i לאורך φ_{ij}.

המרחב X מכוסה ע"י קבוצות פתוחות איזומורפיות קאנונית ל- U_i (אנחנו נאפשר לעצמנו לסמנן ב- U_i).
על כל אחת מן הקבוצות נתונה אלומה $\mathcal{O}_i$.
φ_{ij} מגדירה איזומורפיזם של אלומות

$$\varphi_{ij} : \mathcal{O}_i|_{U_i\cap U_j} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_j|_{U_i\cap U_j}$$

המקיים אותן אכסיומות. אנחנו טוענים כי הנתונים האלה מאפשרים "להדביק" אלומה ולקבל אלומה על כל X.

תהי $V\subseteq X$ קבוצה פתוחה. נסמן $V_i=V\cap U_i$. נגדיר חתכים של $\mathcal{O}$ על V כאוסף חתכים $x_i\in\mathcal{O}_i(V_i)$ המתאימים בחיתוכים במשמעות הבאה:

$$x_i\in\mathcal{O}_i(V_i) \longrightarrow \mathcal{O}_i(V_i\cap V_j) \xrightarrow[\sim]{\varphi_{ij}} \mathcal{O}_j(V_i\cap V_j) \leftarrow \mathcal{O}_j(V_j)\ni x_j$$

(φ_{ij} מעביר את הצמצום של x_i לצמצום של x_j)

תרגילים.

1. תהי $Spec(A)=\coprod U_i$ הצגה של $Spec(A)$ כאיחוד זר של מרכיבי הקשירות. הוכח כי

א. מספר מרכיבי הקשירות סופי

ב. החוג A מתפרק $A=A_1\times\dots\times A_n$, $U_i\approx Spec(A_i)$

2. הוכח כי חוג Artin (כ.ל. חוג Noether שבו כל אידיאל ראשוני שלו מכסימלי) הוא מכפלה ישירה סופית של חוגי Artin מקומיים.

3. תהיין A,B אלומות של חבורות אבליות על מרחב טופולוגי X, $f:A\to B$ הומומ' של אלומות (כ.ל. אוסף $f_U: A(U)\to B(U)$ מתואם עם הצמצומים). הוכח כי קדם-אלומה K מוגדרת ע"י הנוסחא
$$K(U)=Ker(f: A(U)\to B(U))$$
היא אלומה.

4. נניח כי $f:A\to B$ הומומ' מתח"ע של אלומות. נגדיר קדם-אלומה C ע"י הנוסחא $C(U)=B(U)/A(U)$.

תחקרו את הדוגמא המובאת מטה כדי להבין כי C לא תמיד אלומה:

X מרחב טופולוגי, למשל, $X=S^1$ (מעגל)

$B(U)$ - אוסף הפונקציות הרציפות על U

$A(U)$ אוסף הפונקציות הקבועות מקומית על U (כ.ל., קבועות על כל מרכיב קשירות).